財務総合政策研究所
Ministry of Finance, Policy Research Institute
過去の「シリーズ日本経済を考える」については、
財務総合政策研究所ホームページに掲載しています。
http://www.mof.go.jp/pri/research/special_report/index.html

シリーズ 日本経済を考える 107

コンベクシティ入門 ―日本国債における価格と金利の非線形性―

東京大学 公共政策大学院／財務総合政策研究所
服部 孝洋[*1]

1．はじめに

「金利リスク入門―デュレーション・DV01（デルタ、BPV）を中心に―」（服部、2020c）では最も代表的な金利リスクの指標であるデュレーションについて解説を行いました。デュレーションとは金利が変化した時、どの程度国債の価格が低下するかを示すものであり、国債のような固定利付債の場合はおおよそ年限と一致するなど、便利な性質があります。デュレーションを用いれば金融機関が有する国債の金利リスク量を簡易的に計測できるなど実務的に様々な場面で用いられています。

服部（2020c）で強調したようにデュレーションは金利の微小の変化に基づく概念です。逆に言えば、仮に金利が大きく変化した場合、デュレーションのみに基づき計算すると誤った価格変化が算出される可能性があります。実は、デュレーションは金利水準に依存し、このことを捉える概念として「コンベクシティ」があります。例えば、読者が40年国債を保有しており、金利が1%上昇した場合を考えてみます。40年債のデュレーションが35であるとすると、デュレーションのみを考慮すると（デュレーションは金利が動いた時の価格の感応度でしたから）35×1%=35%の価格低下という予測が立ちます。しかし、実際には金利が上昇する中で金利リスク（デュレーション）が低下するというコンベクシティの効果も考慮すると実際の価格低下は35%より小さな値になるのです。本稿で説明するとおり、国債のコンベクシティはデュレーションのおおよそ2乗の値になりますから、特に生命保険会社など超長期債を保有する投資家にとって重要性が高い概念といえましょう。

もっとも、従来の債券テキストではコンベクシティの説明があまり丁寧に行われていないためか、実は債券市場に長く携わった人でもなぜ債券にコンベクシティが存在するかを直感的に説明することは必ずしも容易ではありません。そこで本稿では紙面を割いてコンベクシティを説明することで、その直感について正面から取り上げようと思います。本稿では日本国債のコンベクシティについて具体例を挙げて議論をするとともに、生命保険が有するコンベクシティなど具体的な事例を取り上げます。また、正確な理解のため数式を用いた説明も行います。なお、本稿は服部（2020c）で説明した概念を前提としているため、本稿を読む前にそちらをご一読いただければ幸いです。

＊1） 本稿の意見に係る部分は筆者の個人的見解であり、筆者の所属する組織の見解を表すものではありません。本稿の記述における誤りは全て筆者によるものです。また本稿は、本稿で紹介する論文の正確性について何ら保証するものではありません。本稿につき、コメントをくださった多くの方々に感謝申し上げます。

2．コンベクシティとは

2．1　金利が変化した時のデュレーションの変化

これまでデュレーションやDV01など微小な変化に伴う金利リスクを考えてきました。もっとも、金利が大きく変化した場合の価格の変化を算出しなければならない時も少なくありません。例えば、バーゼル規制による銀行勘定の金利リスクの計測では円金利が100bps（＝1%）上昇した場合の損失量を算出することが要請されています。この場合、DV01で1bps動いた時のリスク量が算出できることを考え、DV01を100倍することで、100bps金利が上昇した場合の損失量を考えることが一案です。もっとも、注意すべきことは、服部（2020c）で記載したとおり、DV01は微小な金利の変化で定義されており、実は金利が大幅に上昇した際の価格変化は単純にDV01を比例させた値にならない点です*2。

冒頭で強調しましたが、デュレーションの大きさは金利水準の大きさに依存します。すなわち、同じクーポンと償還をもつ債券であっても、金利が3%ついている世界と1%ついている世界では、デュレーションの値そのものが変わるのです。結論を先にいえば、金利が高い水準にあればデュレーションは（相対的に）低い値をとりますし、金利が逆に低い水準にあれば、デュレーションは（相対的に）高い値をとります。

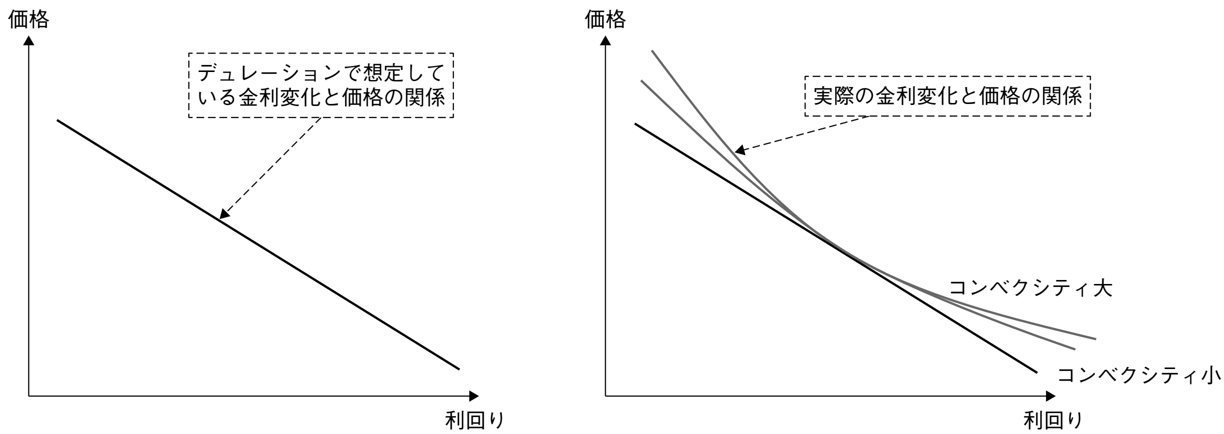
図1は縦軸に国債の価格、横軸に利回りをとることで、国債価格と金利の関係を示しています。デュレーションは左下図のように金利と価格の間に線形の関係があると想定した概念です。デュレーションは前述のとおり、金利が動いた時の価格変化率でしたから、この傾きが金利感応度（デュレーション）に相当します。左図の場合、金利がどのような水準でもその傾きは一定ですからデュレーションは金利の水準に依存していないと想定しています。

例えば、服部（2020c）で記載したとおり、現在の10年国債のデュレーションは9.8程度です。デュレーションは金利の微小の変化に伴う価格の変化率でしたから、たとえば1bps（=0.01%）金利が上昇すると、価格は0.098%低下することになります。仮に金利と価格の関係が左図のような形であれば、100bps（=1%）の金利上昇の場合、国債の価格は9.8%（1bpsの金利上昇の100倍に相当）低下することになります。デュレーションのみをもちいて金利感応度を計算した場合、いわば、左図のような線形の関係を想定してリスク量を算出していることになるわけです。

しかし、実際の金利と価格の関係はこのような直線（線形）の関係ではなく、図1の右側のようにカーブを描きます。これをカーブの曲がり具合を表す概念を用いて「コンベクシティ」と表現します。このように金利と価格の間に下に凸の関係性がある場合、図2に記載しているとおり、金利が低い場合、傾きは大きいためデュレーションは相対的に高い一方、金利が高い場合は傾きが小さいため、デュレーションは相対的に小さくなります。

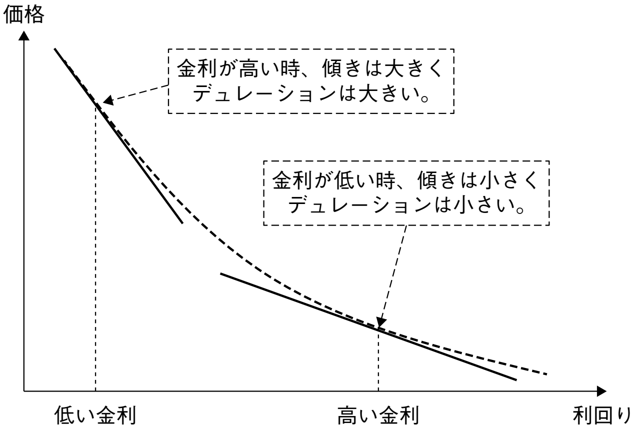
連載 日本経済を考える

図1　デュレーションとコンベクシティの関係



＊2）銀行の場合、保有している債券の年限が短く、コンベクシティが小さいこともあり、実務的にはDV01や1BPVを100倍した値が用いられることも少なくありません。

図2　金利水準とデュレーションの関係



デュレーションを金利が変化した時の「債券価格の変化」とするならば、コンベクシティとは金利が変化した際の「デュレーションの変化」です。このようにデュレーションは金利の水準に依存するため、コンベクシティを有する国債は、金利が大きく上昇した時は、金利が上昇する過程でデュレーションが徐々に低下する効果が発生します。金利が上昇する中で、コンベクシティがあることにより徐々にリスク量が低下していくことになりますから、コンベクシティはいわば価格低下のクッションとして働きます。その一方、金利が低下した時はデュレーションが大きくなる効果があるため、金利低下に伴う価格上昇はより大きくなります。このように金利が上がっても、下がってもコンベクシティは国債のロングの投資家にとってプラスに働くと解釈することもできます*3。

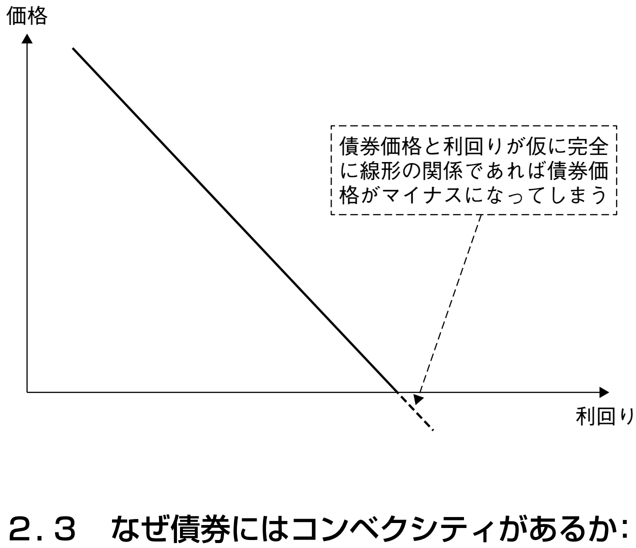
ちなみに、国債など大部分の債券はこのような性質を有しますが、債券の中には金利が上がる（下がる）と逆に、デュレーションが上がる（下がる）ものもあります。このような債券は負（ネガティブ）のコンベクシティを持ちます。ネガティブ・コンベクシティについてはBOX 1を参照してください。

２．２　なぜ債券にはコンベクシティがあるか：債券価格のゼロフロアを使った説明

債券のテキストではコンベクシティはこのくらいの説明で終わることが通常です。ここから、なぜそもそも債券にはコンベクシティがあるのかを考えていきたいと思います。債券市場に携わると必ずコンベクシティという概念に触れるのですが、実はなかなか直感的に理解しにくい概念です。筆者もこの原稿を記載するにあたり、多くの実務家と会話しましたが、債券にコンベクシティがあることを直感的に説明することが容易ではないことに改め気づかされました。

よくある説明は、債券価格が0円以下にはならないことに着目したものです。もし仮に図3のように金利と価格は線形の関係にあり、コンベクシティがなかったとしましょう。この場合、金利が上昇するにつれ、いつか価格が0円以下になってしまいます。しかし、価格がマイナスになるとは、お金をもらって利回りを生む債券を購入できることを意味するため、これは現実的ではありません。このことを考えると、金利が上がるにつれて傾きが低下していく（つまりデュレーションが低下していく）効果が生まれる必要があり、これが金利と価格の非線形の関係を生み出します。このように解釈すれば、債券価格には0円というフロアのオプションがあることがコンベクシティという価値を生んでいると解釈することができます。これはコンベクシティがないと矛盾が出ることを示すといういわば背理法のような説明です。

図3　金利水準とデュレーションの関係（コンベクシティがなかった場合）



２．３　なぜ債券にはコンベクシティがあるか：割り引くこととコンベクシティの関係

これで納得される読者もいるでしょうが、ここではもう少し直接的にコンベクシティを考えるため、次のようなケースを考えてみましょう。例えば、私（筆

＊3）　ペデルセン（2019）でも、「ロングの投資では、利回りが変化する際に大きなコンベクシティであることが望ましい」（p.346）と記載しています。

者）がクーポン1%を有する100円の1年国債に投資していたとしましょう。この場合、私は1年待てば、クーポン1円と元本100円を受け取ることができます（簡単化のためクーポンが年1回払いとしています）。しかし、私がこの債券を購入した後、急に金利が上昇し、1年債の利回りが2%に上昇したとします。これは政府が2%のクーポンを有する国債を100円で発行する状況へと市場が変化したことを意味します。そこで、読者は（筆者とは異なり）クーポン2%を生む1年債を100円で購入できたとしましょう。

もちろん私としては1%のクーポンを生む国債と引き換えに2%のクーポンを生む国債が欲しいですが、読者はもちろんただでは渡したくありません。それでは私は読者にいくら払って交換すべきでしょうか。まず、1%のクーポンを生む国債と2%のクーポンを生む国債は1年後それぞれ1円、2円のクーポンを生み出しますから、キャッシュ・フローの違いは1円になります。そこで、仮に私が読者に1円を支払って、2%のクーポンを生む国債を読者と交換したとします。この場合、私はこの金利上昇に伴っていわば1円損したと解釈できますから、保有していた国債の価格が100円から99円に低下したと解釈できます。これは金利1%上昇に対して、ちょうど100円の1%に相当する1円分低下しているわけですから、図1でいえば、左図のように線形の形で低下していると解釈できます。これは金利と価格に線形の関係（つまりデュレーションのみを想定する関係）があることを意味しています。

もっとも、私はこのような取引には応じません。なぜなら、私は今の1円と将来の1円の価値が違うことを知っているからです。今1円を得られれば、1年間運用できますから、それが金利を生みます*4。そのため、（私が保有する1%クーポンの国債に対して）1年後1円高いクーポンがもらえる国債に対して1円支払うくらいであれば、その1円を1年間運用したほうがよいという判断をするわけです。逆に言えば、私と読者が折り合える価格は、1年運用してちょうど1円に相当する現在の価格（つまり、1円を金利で割り引いた価格）になります。ここで割り引く金利を2%とするならば、$1/(1+0.02) \fallingdotseq 0.98$ですから、先ほどのケースでいえば、1円ではなく、0.98円を読者に渡せばよいということになるわけです。これは1%の金利上昇に対して、（100円の1%分に相当する）1円の損失ではなく、0.98円の損失にとどまっているわけですから、いわば非線形の関係が生まれてきているわけです。これがまさにコンベクシティの効果です。このようにして考えると、我々がそもそも割り引くという行為をおこなうがゆえ、債券のコンベクシティが発生するということがわかります。

2.4　コンベクシティと金利水準・年限の関係

この議論を発展させれば、金利の高い国債ほどコンベクシティが大きいことが示せます。先ほどは1%金利上昇を考える際、1%の1年債を考えました。今度は私が金利10%の1年国債を購入して、すぐに1%だけ金利が上昇したとしましょう（先ほどと同様、読者は金利上昇後に1年国債を購入できたとします）。1年債の金利が10%から（先ほどと同様）1%上昇した場合、私は（1%金利が高い）金利11%の1年国債が欲しいですが、読者はただでは渡したくありません。先ほどの事例では1年2%で運用しましたが、今回は金利が11%であるため、1年11%で運用できますから、1円の現在価値は$1/(1+0.11) \fallingdotseq 0.9$となります。先ほどの事例では1年債が1%の金利上昇をした場合、現在価値は0.98であったことを思い出すと、同じ1%の金利上昇であっても、1円の現在価値は0.98円から0.9円へと低下しており、この交換で私が支払う価格は0.98円から0.9円へと縮小しています。その意味で、（100円の1%分に相当する）1円に比べ、その損失分が一層小さくなりますから、金利水準が高いと非線形性がより一層大きいことがわかります。このことからコンベクシティは金利が高いほど大きいことがわかりますが、これは金利が高ければ将来のキャッシュ・フローに対して、私たちはより強く割り引くことから来ているわけです。

年限が長い国債についてもコンベクシティが大きくなります。私が金利1%の（1年債ではなく）10年国債を今購入して、すぐに1%だけ金利が上昇したとしましょう（先ほどと同様、読者は金利上昇後に10年

＊4）実際に現在の円金利の中にはゼロあるいはマイナスになっているものもありますが、ここではコンベクシティの一般的な説明を行うため、金利が正であることを想定しています。

国債を購入できたとします）。先ほどの例と同様、私は読者のもつ（1％金利が高い）金利2％の10年国債と交換したいわけですが、読者はただでは渡したくありません。10年債における1％の金利上昇の場合、デュレーションが10であるとすれば、非線形性を勘案しなければ（100円の債券に対して）10円だけ価格低下することに相当します。しかし、筆者はこの交換に際し、10円支払うことはありません。なぜなら、今10円受け取れば、10年間複利で運用できるため、10年後10円以上得ることができるからです。この場合、複利の効果があるため、10円はより一層大きな金額になり、このことは将来を大きく割り引く効果を持ちますから、非線形性はより大きいことにつながります。このことは、コンベクシティは1年国債より、例えば40年国債など年限が長い国債のほうが大きいことを意味します。

BOX 1　ネガティブ・コンベクシティ

債券の中には、負のコンベクシティを持つ債券もあります。その最も代表的な債券が不動産担保証券（Mortgage-Backed Securities, MBS）です。MBSは、金利が低下すると担保となる住宅ローンの借り換えが生じ、年限が短くなる効果が生まれるため、負のコンベクシティを有します。例えば、MBS市場において金利が低下（上昇）した場合、MBSは負のコンベクシティを持つため、（国債など正のコンベクシティを持つ債券とは異なり）デュレーションが低下（上昇）します。負のコンベクシティが興味深い点は、MBSを有する投資家は自らが有する金利リスクが変化してしまうため、この調整のためには、例えば米国債や金利スワップをロング（ショート）することで金利リスクをとる（減らす）必要が生まれる点です（このようなヘッジをコンベクシティ・ヘッジといいます）。これは金利が下がった（上がった）場合（すなわち、債券の価格が上がった（下がった）場合）、コンベクシティ・ヘッジのためさらに債券を買う（売る）メカニズムを生むため、金利の動きが増幅する効果を持ちます。米国のMBS市場は巨大な市場であるため、金利が大きく動いた時、MBSのコンベクシティ・ヘッジで市場が動いたと説明されることは少なくありません。四塚（2005）は、「近年の米国市場において、政府系金融機関やヘッジファンドなどによるコンベクシティ・ヘッジは国債市場やスワップ市場を揺るがす規模にまで拡大しており、いまやMBSアービトラージを理解せずに米国債券市場を理解することはできないと言っても過言ではない」（p.11）と指摘しています。なお、タックマン（2012）では負のコンベクシティを持つ証券としてコーラブル債を例に挙げていますが、同じメカニズムで金利が下がることによりコールがかかる確率が上がることがデュレーションを低下させる要因となり、負のコンベクシティを生みます。

3．コンベクシティのフォーマルな定義

3．1　数式を用いたコンベクシティの定義

服部（2020c）で説明したとおり、デュレーションとは金利（r）が変化した時の価格（P）の変化でしたが、前述のとおり、コンベクシティは金利が変化した際のデュレーションの変化分になります。デュレーションを$D=-\frac{1}{P}\frac{dP}{dr}$という微分を用いた概念で定義すると、コンベクシティは金利が変化した際のデュレーションの変化ですから[*5]、下記の式がコンベクシ

＊5）厳密には$-\frac{dD}{dr}$がCになるわけではありません。計算すれば、$-\frac{dD}{dr}=\frac{d\left\{\frac{1}{P}\frac{dP}{dr}\right\}}{dr}=-\frac{\left(\frac{dP}{dr}\right)^2}{P^2}+\frac{1}{P}\frac{d^2P}{dr^2}=-\left(\frac{1}{P}\frac{dP}{dr}\right)^2+C=-D^2+C$となります（$\frac{1}{P}$を$r$で微分したとしても0になるわけではないことに注意。）。Cは$-\frac{dD}{dr}$とは一致せず、正確には$C=-\frac{1}{P}\frac{d(PD)}{dr}$として求められます（この脚注を記載するにあたり、財務総合政策研究所客員研究員の石田良氏のサポートを得ました。記して感謝申し上げます。）

ティ（C）になります*6。

$$C \equiv \frac{1}{P}\,\frac{d^2P}{dr^2} \tag{1}$$

また、テイラー展開を用いれば、金利が変化した場合の国債の価格の変化について、デュレーションだけでなくコンベクシティまで考慮した場合、下記の式が成立します（この式も債券のテキストに必ず記載がある関係式ですが、数式を使った導出は4節を参照してください）。

$$\frac{\Delta P}{P} = -D\Delta r + \frac{1}{2}C(\Delta r)^2 \tag{2}$$

３.２　日本国債の有するコンベクシティの値

図4は2年から40年国債のコンベクシティのデュレーションとコンベクシティの値を示しています。デュレーションは年限が長くなるに比例して大きくなっていきますが、コンベクシティも長い国債ほど大きいことが確認できます。服部（2020c）で強調したように国債のデュレーションはおおよそ年限（平均回収期間）というイメージでよいですが、コンベクシティについては平均回収期間の二乗というイメージになり、コンベクシティは長くなればなるほど二次関数的に増大しています（図4で概ねそうなっていることをご確認ください。国債のコンベクシティは平均回収期間のおおよそ二乗になる理由は4節で議論します）。

図4　日本国債のデュレーションとコンベクシティ

	2年	5年	10年	20年	30年	40年
デュレーション	1.95	4.83	9.79	19.04	27.25	35.67
コンベクシティ	4.6	25.4	100.3	380.0	798.1	1377.5

注：これは2020年9月のカレント銘柄についてBloombergの算出値を参照しています。コンベクシティの値はBloombergにおける金利変化が%表示になっていることを調整するため、Bloombergの値を100倍した値になっています。この詳細は4節を参照してください。

図4の数字を使って、30年の日本国債について1%の金利上昇があった場合、コンベクシティが国債の価格低下にどのような影響を与えるかを考えてみましょう。仮にデュレーションだけを考えることにすると、デュレーションが27.25ですから、1%の金利上昇により27.25%の価格低下となります。一方、コンベクシティまで加味すると、デュレーションが27.25、コンベクシティが798.1ですから、式（2）を用いれば、$\Delta P/P = -27.75\Delta r + \frac{798.1}{2}(\Delta r)^2$になります。$\Delta r$が金利上昇部分ですが、例えば、1%の金利変化であった場合、$-27.75\times 1\% + \frac{798.1}{2}(1\%)^2 = -23.76\%$となり、コンベクシティがあることにより、価格の下落が小さくなることがわかります。

３.３　コンベクシティ活用の場面：生命保険会社の事例

服部（2020c）のBOX 1で説明したとおり、生命保険会社が資産側と負債側のデュレーションをマッチさせるという形でAsset Liability Management (ALM)を行っています。実際、生命保険会社はALMの観点から資産サイドのデュレーションを伸ばしてきましたが、これは具体的には30年や40年国債など年限の長い国債の購入を積極化させることでリスク管理を行ってきたわけです。もっとも、資産と負債の金利リスクをマッチさせるという意味でいえば、ALMではデュレーションだけでなく、コンベクシティもマッチさせた方がより望ましいリスク管理といえます。事実、タックマン（2012）でも、「金利変動の影響を抑えようとする場合、デュレーション単体よりも、デュレーションとコンベクシティの両方を利用したほうが高いヘッジ効果を得られるということである」(p.113）と指摘しています。

生命保険会社が販売する商品には、例えば、終身保険のように非常に年限の長い契約もあります。実際、年限の長い終身保険のコンベクシティは、実務家の試算によっては2,000を超えるようなケースもあります(終身保険のコンベクシティが債券より長くなる可能性については4.3節を参照してください)。したがって、終身保険など年限の長い商品を提供している生命保険会社はコンベクシティの大きな負債を有していると解釈できます。服部（2020c）で指摘したとおり、生命保険会社はデュレーションのミスマッチがあり、時間をかけてマッチングを進めていたわけですが、実はコンベクシティという観点でもミスマッチがあった

＊6）　服部（2020）ではDV01やベーシス・ポイント・バリューをデルタと呼ぶと説明しましたが、オプションでは、デルタの変化率をガンマと呼びます。オプションの価値をV、原資産の価格をPとするとガンマは$\gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial P^2}$と定義されます。ここではコンベクシティは債券価格に対する金利の2階微分と説明していますが、金利を債券のデリバティブだと解釈すれば、コンベクシティはガンマそのものであることが理解できます。

わけです。

生命保険会社が抱えるコンベクシティのミスマッチにかかるリスクは実際に顕在化しました。ご存じのとおり、日本国債の金利は長期的に低下トレンドにあり、年々、金利が低くなっていきます。このような局面で日本のように金利が低下していくと、負債サイドのコンベクシティが大きいがゆえ、デュレーションは上昇していくことになります。一方、資産サイドのデュレーションはコンベクシティが相対的に小さいがゆえ、さほどデュレーションは伸びていきません。すなわち、生命保険会社の資産と負債の構成が変化しなかったとしても、資産側と負債側のデュレーションのミスマッチが拡大していくことになったわけです。見方を変えれば、デュレーションのミスマッチだけでなく、コンベクシティのミスマッチを解消するために、生命保険会社は超長期債へ投資する必要性が生まれているとみることもできるのです。

ここではもっぱら生命保険会社のALMにフォーカスしてコンベクシティの活用例を説明しましたが、金利上昇時のリスク量を計算するうえでコンベクシティを考慮することも少なくありません。例えば、日銀の金融システムレポートでは、金利が1%上昇したときの金利リスク量（100ベーシス・ポイント・バリュー）が掲載されていますが、このリスク量はコンベクシティも考慮した値になっています[*7]。

３．４　国債先物の金利リスク量とコンベクシティ

リスク管理に際して重要な役割を果たす国債先物について、そのリスク量とコンベクシティの関係を説明します。まず、先物価格をP、コンバージョン・ファクターをCF、残存7年の国債の価格をP^{CTD}とします。服部（2020a）で説明したとおり、この場合、$P \times CF = P^{CTD}$が成り立ちますので、金利感応度を考えるため、先物価格（$P = 1/CF \times P^{CTD}$）を金利（r）で微分し、下記のように先物のDV01を導出します。

$$\frac{\Delta P}{\Delta r} \times 0.01\% = \frac{1}{CF} \underbrace{\frac{\Delta P^{CTD}}{\Delta r} \times 0.01\%}_{\text{7年国債（チーペスト）のDV01}}$$

ここで$\Delta P^{CTD}/\Delta r \times 0.01\%$は7年国債の（チーペスト）DV01に相当しますが、先物の金利リスク量（DV01）はこれに$1/CF$を掛けた値になります。服部（2020a）で説明したとおり、現在、CFはおおよそ0.7前後になりますから、CFはおおよそ1.4程度の値になります。したがって、先物の変化自体は7年国債に連動しますが、先物価格の動きはCFで拡張されたような大きさで動く点に注意が必要です。その結果、先物のDV01はおおよそ10年国債のDV01に近い値になります。

大切な点は先物の金利リスク量であるDV01は変化しうる値であることです。そもそもデュレーションとは「期間」の概念であり、期間とリスクが関係している以上、債券は時間を通じてリスクが低下していきます。チーペストは、受渡適格銘のうち残存年数7年に近い国債ですが、チーペストは時間がたつにつれ年限が短くなります。また、チーペストであった銘柄の年限が7年より短くなれば、チーペストとなる銘柄は変わりますから、例えば、チーペストの年限は0.25年延びることで金利リスクが増加することになります。

もっとも、これ以外にも国債先物の金利リスク量を増加させる要因はあります。まず、金利が低下することにより、チーペストのクーポンが低くなることでCFが低下していることが挙げられます（CFが小さくなると、$1/CF$は大きくなるため、先物のリスク量は増加します）。また、コンベクシティ効果によりデュレーションは金利水準に依存しますから、7年国債のデュレーション（DV01）そのものが金利低下の中で大きくなっている点も看過できません。

実務家は国債先物1枚のDV01がおおよそ10万円というイメージをもっていますが、このように先物の金利リスク量は様々な要因の影響を受けますから、いつも一定の値であるわけでなく、変化しうるものとして認識しておく必要があります。実際、円金利は低下トレンドにありますから、国債先物の金利リスク量は上昇傾向にあります。

＊7）日銀の金融システムレポートではコンベクシティ以上の高次項も勘案した推計値になっています。

連載　日本経済を考える

4．数式を使ったコンベクシティの説明

4．1　デュレーションとコンベクシティの関係

コンベクシティとテイラー展開

デュレーションとコンベクシティについては、債券価格に対してrについてテイラー展開による2次近似をすることでその関係を表現できます。ここで債券価格$P(r)$について、金利rの周りでテイラー展開すると下記の近似式が導出できます。

$$P(r+\Delta r) \simeq P(r)+\frac{dP}{dr}\Delta r+\frac{1}{2}\frac{d^2P}{dr^2}(\Delta r)^2$$

この式を$P(r+\Delta r)-P(\mathrm{r})=\Delta P \simeq \frac{dP}{dr}\Delta r+\frac{1}{2}\frac{d^2P}{dr^2}(\Delta r)^2$

と変形し、これをPで割ることで、下記の式が得られます。

$$\frac{\Delta P}{P} \simeq \frac{1}{P}\frac{dP}{dr}\Delta r+\frac{1}{2}\frac{1}{P}\frac{d^2P}{dr^2}(\Delta r)^2=-D\Delta r+\frac{1}{2}C(\Delta r)^2$$

ここでDがデュレーション、Cがコンベクシティに相当します。

テイラー展開では3次項以降についても記載できますが、金利変化の3乗になると極めて小さくなるため、通常の固定利付債については3次以上の項目についてさほど気にすることがないとも言えます。実際、実務では債券の実務で3次項を考慮することはほとんどありません。また、テイラー展開は金利rの周りで近似しているわけですので、大きな金利変化が起こった時はそもそも粗い近似になりえる点にも注意が必要です*8。

固定利付債のケース（10年国債）

ここで、服部（2020c）のBOX2と同様、10年国債を事例にコンベクシティを考えてみます（実際のクーポンは年2回支払いですが簡略化しています*9）。まず下記の通り、10年国債の価格が各キャッシュ・フローの割引現在価値で決まるとします。

$$P=\frac{c}{(1+r)}+\frac{c}{(1+r)^2}+\cdots+\frac{c+100}{(1+r)^{10}}$$

デュレーションは上記を金利で微分して価格で割ったものであり、下記のようになります。

$$D=-\frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial r}=\frac{1}{(1+r)}\frac{1}{P}\left[1\times\frac{c}{(1+r)}+2\times\frac{c}{(1+r)^2}+\cdots+10\times\frac{c+100}{(1+r)^{10}}\right]$$

服部（2020a）で指摘したとおり、上記からデュレーションは平均回収期間と解釈できますが、上記の式は期間を金利で割り引いた形になっているため、金利が上昇（下落）すると、平均回収期間が短く（長く）なります。デュレーションが金利水準に依存する理由は、金利が高い（低い）場合、平均回収期間を強く（弱く）割り引くため、平均回収期間が短く（長く）なるからです。

コンベクシティは金利が変化した際のデュレーションの変化分ですから、上記について更に金利で微分することにより、下記の式が導出できます。

$$C=\frac{1}{P}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}=\frac{1}{(1+r)^2}\frac{1}{P}\left[1\times2\times\frac{c}{(1+r)}+2\times3\times\frac{c}{(1+r)^2}+\cdots+10\times11\times\frac{c+100}{(1+r)^{10}}\right]$$

これをみると、各キャッシュ・フローの現在価値に年限の積がウェイトとしてかかっていることがわかります。例えば、$10\times11\times\frac{c+100}{(1+r)^{10}}$は満期のキャッシュ・フローの現在価値に10年と11年の積がウェイトとしてかかっています。こうしてみると、年限のいわば二乗がウェイトとしてかかるため、国債の年限が長くなるほど、二次関数的にコンベクシティが大きくなることがわかります。

割引債の場合、期中のクーポンがないため、c=0となります。また、そもそも割引債の価格は満期で100円になる債券をrで割り引いた値になるため、$P=\frac{100}{(1+r)^{10}}$となることを利用すると、上式から10年の割引債のコンベクシティは下記のように記載できます。

$$C=\frac{10\times11}{(1+r)^2}$$

＊8）クルーイ・マーク・ガライ（2015）では「コンベクシティを調整した債券価値は、（省略）利回りに大きな変化があった場合の近似にすぎない」（p.181）と注意を促しています。

＊9）タックマン（2012）では年2回の利払いで定式化しているため、厳密な説明を知りたい方は同書を参照してください。また、ここではわかりやすさを重視するため10年債の事例を取り上げていますが、タックマンではT年債という一般的な形でデュレーションとコンベクシティを定義しています。

４．２　コンベクシティの実際の計算方法[*10]

本文ではコンベクシティは$C=\frac{1}{P}\frac{d^2P}{dr^2}$と定義しました。実際の計算に当たっては、0.01%金利が変化したときの価格変化に基づく近似式を利用することが少なくありません。まず、ここで$P(r+0.01\%)$は金利が0.01%上がった時の価格であり、$P(r-0.01\%)$は金利が0.01%下がった時の価格とすると、コンベクシティは下記のような形で記載することができます。

$$C=\frac{d^2P}{dr^2}\simeq\frac{dP(r)/dr-dP(r-0.01\%)/dr}{0.01\%} \tag{3}$$

また、$\frac{dP(r)}{dr}\simeq\frac{P(r+0.01\%)-P(r)}{0.01\%}$と近似できますし、$\frac{dP(r-0.01\%)}{dr}\simeq\frac{P(r)-P(r-0.01\%)}{0.01\%}$と近似できますから、(3) から下記のように記載できます (0.01%は10^{-4}である点に注意してください。)。

$$\begin{aligned}C&\simeq\frac{1}{P(r)}\left[\frac{P(r+0.01\%)-P(r)}{(0.01\%)^2}-\frac{P(r)-P(r-0.01\%)}{(0.01\%)^2}\right]\\&=\frac{1}{P(r)}\left[\frac{P(r+0.01\%)+P(r-0.01\%)-2P(r)}{(0.01\%)^2}\right]\\&=\frac{100{,}000{,}000}{P(r)}\left[P(r+0.01\%)+P(r-0.01\%)-2P(r)\right]\end{aligned} \tag{4}$$

したがって、$P(r)$、$P(r+0.01\%)$、$P(r-0.01\%)$の値が得られれば、近似的にコンベクシティの値が得られます。もっとも、例えば、国債のコンベクシティについてBloombergの機能では下記の (5) 式のように、(4) 式の$\frac{1}{100}$の値が用いられています。

$$\frac{1{,}000{,}000}{P(r)}\left[P(r+0.01\%)+P(r-0.01\%)-2P(r)\right] \tag{5}$$

これは本稿のように1%を0.01と表示するのではなく、1%を1として定義しているためと想像されます。本稿では、金利変動がx%のときの債券価格の変化率は$-D\left(\frac{x}{100}\right)+\frac{1}{2}C\left(\frac{x}{100}\right)^2=\left\{-Dx+\frac{1}{2}\left(\frac{C}{100}\right)x^2\right\}$ [%] と考えていますが、Bloombergでは金利変動がx%のときの債券価格の変化率を$\left\{-Dx+\frac{1}{2}Cx^2\right\}$ [%] と考えていると思われます (後者の定義によるコンベクシティは前者の定義によるコンベクシティの$\frac{1}{100}$の値になります)。したがって、実際のコンベクシティの値を参照するにあたり、Bloombergなどのベンダーを使う場合、コンベクシティの定義に注意する必要があります。

なお、実務では$P(r+0.01\%):=P_+$、$P(r-0.01\%):=P_-$として下記のように整理した記載がなされることも少なくありません[*11]。

$$\frac{1}{P}\left[(P_++P_-)-2P\right]\times1{,}000{,}000$$

４．３　債券及び年金とコンベクシティの関係[*12]

タックマン (2012) を参照して、時間をt、満期をT、途中のキャッシュ・フローをC、満期のキャッシュ・フローをFとすれば、一般的にコンベクシティを定義すると下記のように記載できます[*13]。

$$C=\frac{1}{(1+r)^2}\frac{\left[\Sigma_{t=1}^{T}\frac{C}{(1+r)^t}\times t\times(t+1)+\frac{F}{(1+r)^T}\times T\times(T+1)\right]}{P} \tag{6}$$

ここで式 (6) の見通しをよくするため、$r\simeq0$で近似すれば

$$C=\frac{1}{P}\left(C\sum_{t=1}^{T}t(t+1)+FT(T+1)\right) \tag{7}$$

となります (式 (7) では式 (6) からrがドロップされている点に注意してください)。

ここで、2年後に300償還される債券と1,2,3年後にそれぞれ100償還される債券を考えます。金利がゼロとすれば (つまり、$r\simeq0$で近似すれば)、前者は2年後に償還されるのでデュレーションは2ですし、後者の平均回収期間は2年ですので、どちらのデュレーションも2です。また、金利をゼロとすれば、どちらの債券価格Pも一緒です。

上の公式に従えば、前者のコンベクシティは$\frac{1}{P}$(300

＊10) この節を作成するにあたり、財務総合政策研究所客員研究員の石田良氏のサポートを得ました。記して感謝申し上げます。
＊11) Bloombergのマニュアルでもこのような表記がなされています。
＊12) この節を作成するにあたり、財務総合政策研究所客員研究員の石田良氏のサポートを得ました。記して感謝申し上げます。
＊13) タックマン (2012) では半年に1度クーポンを支払い、満期に100支払うキャッシュ・フローを考えています。

$\cdot 2(2+1))$、後者のコンベクシティは$\frac{1}{P}(100\cdot 1(1+1)+100\cdot 2(2+1)+100\cdot 3(3+1))$です。ここで、$1800=300\cdot 2(2+1)<100\cdot 1(1+1)+100\cdot 2(2+1)+100\cdot 3(3+1)=2000$ですから、後者のコンベクシティの方が大きいです。本文で説明したとおり、生命保険会社は終身年金などを販売するがゆえ、遠い将来一定期間継続して支払いが発生する可能性がありますから、その負債サイドのコンベクシティが大きくなる可能性を有しています。

上記のようなメカニズムが生まれる理由はコンベクシティが年限の2乗に比例して増加するためです。2乗で効いてくるものについては、平均が同じときには、ばらつきが大きい方が値が大きくなります。これは、$中=\frac{小+大}{2}$のとき、$中^2+中^2<小^2+大^2$という関係式が成立することからも分かります。これに似た議論として、バーベル型のポートフォリオのほうがブレッド型のポートフォリオより大きなコンベクシティを持つことが挙げられます。これについては例えばタックマン（2012）の6.9節で議論をしています。

BOX 2 コンベクシティ調整（コンベクシティ・アジャストメント）

債券のデリバティブのテキストではコンベクシティ調整（コンベクシティ・アジャストメント）という概念の説明がなされますが、この概念にも債券価格と金利の非線形の関係が深くかかわっています。金利にペイオフが依存するオプションを考える際、本稿で紹介したように金利や価格に非線形な関係があるため、債券価格の期待値と金利の期待値にずれが生じてしまいます。債券プライシングをするうえでその調整が必要になりますが、これはコンベクシティに伴う調整であるがゆえ、コンベクシティ調整といいます[*14]。例えば、コンスタント・マチュリティ・スワップ（Constant Maturity Swap, CMS）などデリバティブのプライシングを考える際、この知識は必要になります（今は発行が停止されていますが、かつて財務省が発行していた15年変動利付国債は10年国債の金利を適用金利としているがゆえ、CMSと強い関連性を有しています）。本稿ではコンベクシティ調整はテクニカルであるため省略しましたが、関心のある読者はハル（2016）の30章などをご参照いただければ幸いです。

5．おわりに

本稿では、コンベクシティについて特にその直感を重視した解説を行いました。筆者を含め、債券市場にかかわったものは必ずコンベクシティについて考える機会があります。しかし、多くの書籍ではその説明が簡素である印象が強く、多くの実務家にとってそのメカニズムが未消化のままであることが少なくありません。そこで本稿では様々な例を取り上げ、可能な限り直感的な説明をするとともに、生命保険会社の例などを挙げ、コンベクシティを理解しておくことの重要性を強調しました。今後はグリッド・ポイント・センシティビティなどこれまで触れてこなかった金利リスクについて説明をすることを予定しています。

参考文献

[1]．ミシェル・クルーイ、ロバート・マーク、ダン・ガライ（2015）「リスクマネジメントの本質 第2版」共立出版
[2]．ブルース・タックマン（2012）「債券分析の理論と実践（改訂版）」東洋経済新報社
[3]．服部孝洋（2019）「イールドカーブ（金利の期間構造）の決定要因について―日本国債を中心とした学術論文のサーベイ―」ファイナンス10月号、41–52.
[4]．服部孝洋（2020a）「日本国債先物入門：基礎編」ファイナンス1月号、60–74.
[5]．服部孝洋（2020b）「日本国債先物入門―先渡と先物価格の乖離を生む要因―」ファイナンス3月号、37–41.
[6]．服部孝洋（2020c）「金利リスク入門―デュレーション・DV01（デルタ、BPV）を中心に―」ファイナンス10月号、54–65.
[7]．ジョン・ハル（2016）「フィナンシャルエンジニアリング〔第9版〕―デリバティブ取引とリスク管理の総体系」きんざい
[8]．ラッセ・ヘジェ・ペデルセン（2019）「ヘッジファンドのアクティブ投資戦略―効率的に非効率な市場」金融財政事情研究会
[9]．四塚利樹（2005）「イールドカーブ戦略の理論と実践―米国債券市場における経験と展望―」Waseda University Institute of Finance, Working paper series.

＊14） 先物と先渡価格の違いについても、コンベクシティ調整という概念が出てきます。ただ、ハル（2016）など通常のファイナンスのテキストでは、証拠金の有無でその価格の乖離を説明することがほとんどです。先物と先渡価格の違いについては服部（2020b）を参照してください。