



シリーズ
日本経済を考える

61

イールド・カーブ 推定の動向

—日本における国債・準ソブリン債を中心に—*1

愛媛大学法文学部
三宅 裕樹

財務総合政策研究所 研究員
服部 孝洋

1. はじめに

イールド・カーブの推定とは、すでに発行されている銘柄の取引価格や利率を用いて、各年限の利回り（ゼロ・クーポン・イールドやパー・イールド）を推定する作業である*2。債券市場において、発行頻度が断続的であることや既発債の年限が時間とともに低下していくため、10年ちょうどの残存年数に対応する利回りがマーケットで観察できるとは限らない。それゆえ、取引価格と利率などの情報を用いて、特定の年限の利回りを推定する作業が必要となる（図表1）。多くの人が目にする金利データの背後で、その推定がなされており、実際に利回りを活用する場合、その推定値を用いることが多い。イールド・カーブの推定は、離散的に存在する利回りを連続的な曲線に繋ぐ作業であるため、「補間（interpolation）」と表現されることもある。

本稿は円債市場におけるイールド・カーブに焦点をあてて、その推定方法や推定に係る諸問題を

包括的にまとめた論文である。本稿の特徴は、円債のベースとなる日本国債（JGB）の推定に加えて、地方債と財投機関債という準ソブリン債も取り扱っている点である。本稿ではまずはイールド・カーブの推定方法について整理したうえで、推定にかかる諸問題を確認する。そのうえでJGBの分析手法を確認し、準ソブリン債のカーブについて議論を行う。

2. イールド・カーブの推定方法

2.1. イールド・カーブ推定

イールド・カーブ推定においてもっとも代表的な研究の一つであるGürkaynak et al. (2007)に従うと、イールド・カーブの推定は、ディスカウント・レート（割引率）あるいはフォワード・レートを①柔軟（flexible）なアプローチに基づき推定を行う方法と②より頑健（rigid）なアプローチで推定をする方法に分けられる*3。

①の柔軟なアプローチでは多くのパラメーター

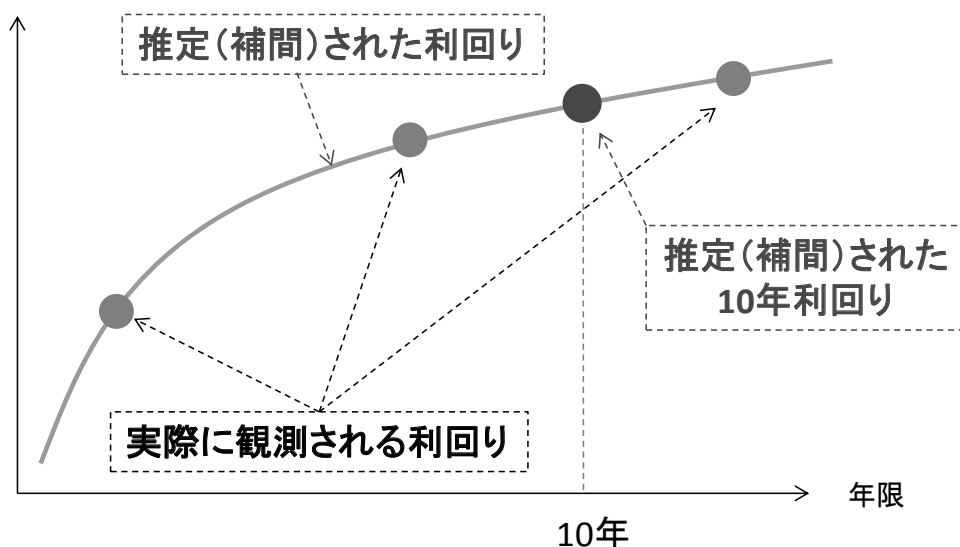
*1) 本稿の作成にあたって、財務省財務総合政策研究所の大関由美子財政経済計量分析室長、山崎丈史主任研究官より有益な助言や示唆をいただいた。また、筆者らの研究において、藤原哉氏（金融庁）、渡部敏明教授（一橋大学）から有益なコメントをいただいた。なお、本稿の内容や意見は全て筆者の個人的な見解であり、財務省及び財務総合政策研究所の見解を示すものではない。

*2) 実務的にはパー・イールド（価格と額面が等しい利付債の利回り）が使われることが多いが、パー・イールドはゼロ・クーポン・イールド（割引債の利回り）より複製できるため、推定に際しては、ゼロ・クーポン・イールドの推定が注力されるケースが多い。なお、ゼロ・クーポン・イールドはスポット・レートと記載されることもある。

*3) Choudhry and Lizzio (2015) などこの分類に従う書籍・論文は多い。もっとも、菊池・新谷（2012）など、より細かな分類を行う研究も存在する。例えば、菊池・新谷（2012）では、カーブ推定に際し、割引率のモデル化が論点になるとしたうえで、①区分多項式を利用する方法、②ノンパラメトリックに推定する方法、③多項式関数を利用する方法、④多項式以外の特定の関数形を仮定する方法に分類している。

図表1 イールド・カーブ推定のイメージ

利回り(イールド)



を伴う方法が用いられる。典型的には年限を区切り、その区間の中で多項式を用いて、ディスカウント・レートやフォワード・レートを近似する手法が用いられる。実務家の間では、スプライン関数を使うことが多く、例えば、財務省が公表している利回りやBloombergの機能であるBVALの算出する利回りは、スプラインベースの補間がなされている*4。

一方、②の頑健なアプローチでは少ないパラメーターを有する特定の関数形が用いられる。具体的にはフォワード・レートを特定の関数形でモデル化したNelson and Siegel (1987) や、その拡張を行ったSvensson (1995) が挙げられる。フォワード・レートをモデル化する背景には、国債や金利スワップの場合、中央銀行による利上げ(利下げ)に係る市場の予想や変動債のプライシングなどにフォワード・レートが用いられることがあるため、フォワード・レートをスムージング

する必要があること等が挙げられる。フォワード・レートは市場参加者の予想金利と解釈することができるため、その予想金利をスムーズ化させたうえで、ゼロ・クーポン・イールドやパー・イールドなどの利回りをバックアップするというイメージである。

Gürkaynak et al. (2007) が指摘しているとおり、この二つの手法のどちらが適切であるかは一概には言えない。トレーダーなどは日々の変動や銘柄間の相対価格などに関心がある一方で、マクロ経済学者は経済状況や金融政策などがイールド・カーブ全体にどのように影響を与えたのかなどに関心がある。言い換えれば、両者はイールド・カーブをみるうえで、その時間軸や目的が大きく異なるため、その望ましいモデルも異なると理解できる。前者の場合、より細かいフィッティングを求めため、多くのパラメーターを含む①を好む一方で、マクロ経済学者はより経済学やフ

*4) ディスカウント・レートを補間した分析として、McCulloch (1975) は3次スプライン、Vasicek and Fong (1982) は指数型スプライン、Steeley (1991) はBスプラインを用いている。一方、フォワード・レートをモデル化したものとして、各小区間内でフォワード・レートが一定であると仮定するHougllet (1980) の手法やフォワード・レートを区分多項式関数の線形結合としてモデル化するFisher et al. (1995) などが存在する。

ファイナンスの理論との解釈がしやすい②を好む傾向がある。特に、Nelson and Siegel (1987)であれば各パラメーターをイールド・カーブの水準や傾きなどという形で解釈することが可能であり、マクロファイナンスでの分析などで使われることも少なくない。BIS (2005)は各国中央銀行によるイールド・カーブの推定方法をまとめているが、①と②両方の方法が各国で混在していることが確認できる。

2. 2. イールド・カーブ推定にかかるその他のポイント

前節ではイールド・カーブの補間にかかるモデルの概要を説明したがその他にも補間を行う上でポイントが複数存在する。

一点目は、目的関数の設定方法である。2.1ではディスカウント・レートやフォワード・レートのモデリングを考えたが、そのモデルのパラメーターを推定するため、何らかの目的関数を設け、その最適化問題を解く必要がある。その際、ディスカウント・レートに債券のキャッシュフローを掛け合わせることで理論価格 (\hat{p}_i) を算出し、実際の価格 (p_i) との乖離 ($\sum_{i=1}^N (\hat{p}_i - p_i)^2$) が小さくなるようにパラメーターを推定することが多い (Nは銘柄数)*5。もちろん、利回りの差そのものを目的関数としたうえで、その目的関数が最小化するようにパラメーターを定める方法もありえるが、この方法はGürkaynak et al. (2007)が指摘するとおり、計算速度が落ちるなどの問題を有する*6。

上記における目的関数の設定に際し、流動性を考慮することもある。例えば同じ国債の中でも流動性が高い銘柄と低い銘柄が混在する場合、それらを等ウェイトにして目的関数を設定するのは

なく、流動性が高い銘柄に高いウェイトを置いて、フィッティングしたほうが実際の利回りに近くなる可能性が高い。具体的には、 $\sum_{i=1}^N \omega_i (\hat{p}_i - p_i)^2$ という形で、発行量や取引量でウェイト (ω_i) を付けたうえで目的関数を最小化することなどが考えられる*7。

二点目は、証券データの取捨選択である。すなわち、同じ発行体であっても、コール条項 (期限前償還条項) の有無や利付債・割引債・変動利付債などのクーポンスキームが異なればそれを整理することが少なくない。例えば、JGBの場合、期間1年以下では割引債 (国庫短期証券) が発行されているほか、利付債については変動利付債も存在しており、その部分を計算対象からカットしてしまうことが少なくない (菊池・新谷 (2012) など)。また、直近発行した銘柄であるオンザラン銘柄 (カレント銘柄) をカットする研究もあれば (Gürkaynak et al. (2007))、オンザラン銘柄のみを用いて推定をする研究 (Jordan and Mansi (2003)) も存在する。オンザラン銘柄には取引が集中するため、オンザラン銘柄ではない銘柄 (オフザラン銘柄) は流動性が落ちる。それゆえ、オンザランとオフザランの銘柄をすべて一緒にしたうえで推定してしまうと、実際の利回りから乖離してしまうという発想がこれらの研究の背後にある*8。

三点目は、モデルのフィットの良さを判定する方法である。すなわち、実際の利回り (y_i) と推定された利回り (\hat{y}_i) の残差二乗和 (root mean squared error: $RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2}$) や残差の絶対値の最大値 (maximum absolute error: $MaxAE = \max_i |y_i - \hat{y}_i|$) を見ることが多い。RMSEは平均的な乖離の度合いを測ることができる一方で、MaxAEは一部に大きな外れ値

*5) フォワード・レートをモデル化する場合、フォワード・レートをディスカウント・レートに変換したうえで、理論価格を算出することが一般的である。

*6) フォワード・カーブのフィッティングをあげるため、上記の目的関数にフォワード・レートの曲率に対する罰則を加えることにより罰則付き最適化問題 (平滑化スプライン、Smoothing spline) を解くケースもある (Fisher et al. (1995)、Waggoner (1997)、Jarrow et al. (2004) など)。

*7) Subramnian (2001)などを参照。

*8) 短期ゾーンにGCレポレートも含めて計算する研究もある (Anderson and Sleath (1999))。

がないかの判定ができる。菊池・新谷 (2012) などのように、これらに加えて「ゼロ・クーポン・イールドの推定値がゼロを下回らないこと」や「ゼロ・クーポン・イールドの推定値に異常値が含まれないこと」などを追加的にチェックする研究も存在する。

3. 日本国債 (JGB) のイールド・カーブ推定

ここから、上記を前提に JGB の推定に関する研究を整理する。

まず、財務省による推定方法は、1年～40年までを1年毎に区切り (グリッドの設定)、3次スプライン関数を用いて補間することにより、コンスタントマチュリティーベースの金利 (年限が常に一定である金利) を算出している*9。財務省の場合、各年限債のカレント銘柄を対象銘柄に選定するなどの工夫をしている。

財務総合政策研究所は2007年にファイナンス、金融工学、統計学等の専門家による「国債の金利推定モデルに関する研究会」を開催している*10。同研究会では40年債導入の背景と検討状況や、日本のイールド・カーブの状況等を踏まえたモデルの方向性について議論を行った。それをうけ、木島・田中両氏より、本研究会メンバーの意見を反映させた金利推定モデルを「当面のモデル」とする「日本円長期金利のモデル化：LGモデル」が報告されている*11。

JGBのカーブ推定については、学術論文も多

数発表されている。Oda (1996) や Eom et al. (1998) はスプライン関数を用いた推定を行っている*12。乾・室町 (2000) はフォワード・レートをモデル化した方法を用いており*13、川崎・安道 (2002) は、割引率をガウス基底関数の線形和としたうえでそのパラメーターを罰則付き対数尤度関数の最大化に基づいて推定している。阿部ほか (2013) はノンパラメトリック法を用いている。

複数の推定方法を比較検討した論文として小峰ほか (1989) が挙げられる。小峰ほか (1989) は1986/12/28、1987/6/30、1987/12/28、1988/6/30の4時点のデータをもちいて、5つの手法*14を用いて推定を行ったうえで、1つの方法に集約してしまうと、直利志向*15や指標銘柄の集中売買といった日本固有の要因を見失う危険性があることを指摘している。また、菊池・新谷 (2012) は、8つの推定方法を比較検討したうえで、Steeley (1991) によるBスプラインを用いたフィッティングが最もフィッティングがよいと結論づけ、その推定結果 (1999/1～2011/12) をウェブサイトで公表している。また、菊池・新谷 (2012) ではJGBの推定において特に重要と思われるフォワード・レートのフィッティングについてJarrow et al. (2004) による平滑化スプラインを用いて、Steeley (1991) の手法と比較検討している。

Bスプラインを用いて補間を行う場合、特に難しい点はそのグリッドをどのように区切るか、と

*9) 詳細は https://www.mof.go.jp/jgbs/reference/interest_rate/outline.pdf を参照。推定結果は財務省ウェブサイト (http://www.mof.go.jp/jgbs/reference/interest_rate/) で公表されている。

*10) 詳細は <http://www.mof.go.jp/pri/research/conference/zk080.htm> を参照。

*11) この論文では、年限30年超の国債イールドを予測することを目的に、スワップカーブのモデル化からスタートし、それをもとに国債イールドを推定するという方法を採用している。詳細は http://www.mof.go.jp/pri/research/conference/zk080/zk080_ron.pdf を参照。

*12) Oda (1996) は最終利回りを3次自然スプライン (cubic natural spline) で、Eom et al. (1998) は、ディスカウント・レートを3次B-spline (cubic B-spline) を使って表現した上でカーブの推定を行った。

*13) 乾・室町 (2000) はあくまで「パラメーター推定の分かりやすい事例」としながらもHougllet (1980) の方法を用いた推定を行っている。

*14) 逐次代入法、Carleton and Cooper (1976)、McCullonch (1975)、Vasicek and Fong (1982)、Hougllet (1980) の5つの手法。

*15) 直利 (直接利回り) とは、アモチ・アキュムを考慮せず、クーポンを取得価格で除した比率であり、直利志向とは直利を重視した債券投資のスタンスを示す。

いう点である。JGBについては発行量とともに銘柄数が多いため、1年毎という形で区切るものもあれば（菊池・新谷（2012）など）、銘柄数がある程度そろうような形でグリッドを設定する方法がある（藤井・高岡（2008）など）。

なお、国債の推定に係るデータであるが、2000年以前の研究では当時、国債の引け値を東証が公表していたこともあり、東証のデータが用いられることが多い。それ以降は日本相互証券株式会社（BB）の引け値と日本証券業協会が公表する公社債店頭売買参考統計値のそれぞれを用いる推定が混在している^{*16}。例えば財務省が公表する各年限の利回りは公社債店頭売買参考統計値を用いて算出している。その一方で、菊池・新谷（2012）はBBの引け値、藤井・高岡（2008）は、1998年12月以降の推定において原則としてBBの引け値を用いている。

4. 準ソブリン債のイールド・カーブ推定

一方、日本の債券市場において近年、その存在感を高めつつあるのが準ソブリン債市場、特に地方債市場である。地方自治体は従来、財政投融资制度や銀行からの借入れを通じた資金調達を主としていた。しかし、2000年代頃より、地方財政の悪化による資金調達需要の増大や地方分権改革の進展などを背景として、資本市場で証券・公募形式で発行される、市場公募債と呼ばれる地方債を発行する地方自治体数が増加していった。同時に、様々な発行年限の地方債が登場するなど、市場公募債の商品性の多様化も進んだ。さらに、IR活動や格付けの取得など投資家向け情報開示を拡充する動きも、地方自治体の間で次第に広ま

っていった。2016年3月末現在、準ソブリン債の発行残高128.3兆円のうち、地方債はその45.8%にあたる58.8兆円を占めている。これは、財投機関債（34.5兆円）・政府保証債（34.8兆円）を大きく超え、普通社債（57.1兆円）をも上回る市場規模となっている^{*17}。

こうした状況を踏まえれば、これまでJGBにほぼ限定されてきた日本の債券市場のイールド・カーブ推定の研究対象を地方債へと広げていくことは、自然な流れといえる。そもそも、地方自治体の多くは毎年度ほぼ決まった時期に地方債を定期的に発行している。そして、上述のように発行年限の多様化が進み、5・10年債を中心としながら、短いものでは2・3年債から、長いものでは20・30年債といった超長期債を発行する地方自治体も増えてきている。その結果、現在では流通市場に100を超す発行銘柄が残存する地方自治体も10団体を超え、日本の地方債市場は、他の先進諸国のそれと比べても、イールド・カーブの推定にとって相当に魅力的な特徴を備えるようになっていく。

この点に注目したのが、Hattori and Miyake（2016b）である。同論文では、45の地方自治体（27都道府県・18政令指定都市）が個別に発行する全国型市場公募債^{*18}、および共同発行市場公募債^{*19}を対象とし、①柔軟（flexible）なアプローチとしてBスプラインモデルに基づく推定と、②より頑健（rigid）なアプローチとしてSvensson（1995）に倣った推定が行われ、両者のフィットの良さの比較がなされている^{*20}。推定結果をみると、RMSEはBスプラインモデルに基づく推定では全ての地方自治体で1bp（ベース・ポイント）以下、Svensson（1995）モデル

* 16) BBの引け値と日本証券業協会の引け値は、報告している業者数や計算方法が異なり、どちらが良いか一概にはいえない。詳細は<http://www.bb.jbts.co.jp/marketdata/marketdata04.html>や<http://market.jsda.or.jp/html/saiken/kehai/downloadInput.php>などを参照。

* 17) 日本証券業協会「公社債発行額・償還額等」。

* 18) 市場公募債のうち、購入者を地域住民などに限定しているものを住民参加型市場公募債、そうした限定を設けておらず、主に機関投資家からの資金調達を目的として発行されるものを全国型市場公募債と呼ぶ。

* 19) 全国型市場公募債を個別に発行している地方自治体（公募団体）が複数集まって、共同で発行している市場公募債。

に基づく推定では6bp以下となっている。発行体別には、残存銘柄数が多い地方自治体ほどフィッティングが良くなる一方、超長期債を発行している地方自治体では特にSvensson (1995) モデルに基づく推定で実際の流通利回りとの乖離が大きくなる、といった傾向がうかがえる。

Hattori and Miyake (2016a) では、地方債市場からさらに財投機関債市場にまでイールド・カーブの推定対象が広がられている。基本的な分析方針はHattori and Miyake (2016b) と同じであるが、財投機関債市場に固有の課題として2000年代の財投機関をめぐる一連の改革の影響をどのように考慮するか、という点がある。すなわち、財投機関債は、そもそも2001年度の財政投融资制度改革を機に各財投機関に発行が認められるようになったものであり、その意味で財投機関債市場の歴史はそう長くない。しかも、2000年代においてはその後、特殊法人改革や政府系金融機関の統廃合改革が実施された。そのため、現存する財投機関の発行銘柄は、地方公共団体金融機構や住宅金融支援機構など一部を除いてそう多くなく、年限別の広がりにも偏りがみられることも珍しくない。この点に関して、Hattori and Miyake (2016a) は、財投機関の多くが統廃合前の組織から債務を承継している事実に着目している。そして、優先劣後関係や担保の設定など信用リスクの観点から、現組織が発行する財投機関債と同等と見なしうる前組織の発行債券が存在する場合には、これを現組織のイールド・カーブ推定のサンプルとして用いている。これにより、合計23、現存分に限れば15の財投機関のイールド・カーブの推定を行うことに成功している。

なお、Hattori and Miyake (2016a・b) の推定結果は、論文筆者のウェブサイト*21で公表されており、誰でも容易に入手できるようになっている。今後も定期的に更新予定とされており、現

在では2016年9月末までの結果が開示されている。これにより、学術研究者にとっては推定結果の検証が、市場関係者にとっては実務上の参考情報としての利用が、各々可能となっている。

5. 結びに代えて

本稿では、日本の債券市場を対象としたイールド・カーブ推定の実証研究を俯瞰した。JGBに関しては、これまでに様々なアプローチからの推定が試みられてきた。菊池・新谷 (2012) などによる複数の推定方法の比較考察もなされ、他国と比べても遜色ない相当数の研究が蓄積されてきたといつてよいだろう。

一方、近年の債券市場の量・質両面での発展、起債主体の多様化といった流れを反映し、イールド・カーブの推定対象を準ソブリン債に広げようとする試みも最近ではみられる。これは、他国の債券市場を対象とした研究では見受けられない新たな方向性を模索する動きとして、大いに注目に値しよう。今後、同市場を対象としたイールド・カーブの推定方法のフィット比較、あるいは同市場の特性に合わせた新たな推定モデルの開発など、さらなる研究の深化が期待される。

*20) なお、国債のイールド・カーブ推定ではフォワード・カーブのフィッティングも重要な点であるが、地方債を含む準ソブリン債では注目されることは稀である。それゆえ、Hattori and Miyake (2016b)、および後に触れるHattori and Miyake (2016a) では、実際のイールドと推定したイールドの乖離にもっぱら着目している。

*21) <http://www.mcnnns77.net/market-data> を参照。

参考文献

- 阿部卓哉・佐々木正信・松岡英俊・池田弘 [2013] 「ノンパラメトリック手法と業界間市場データを用いたイールドカーブの推定」『FRIコンサルティング最前線』Vol.5
- 乾孝治・室町幸雄 [2000] 『金融モデルにおける推定と最適化』、朝倉書店。
- 川崎能典・安道知寛 [2002] 「正則化非線形回帰モデルによるイールド・カーブの推定」、『統計数理』、第50巻第2号、統計数理研究所、149～164ページ
- 小峰みどり・山岸正明・松本和幸・二木高志・司淳・長尾知幸・砂川和彦・佐野尚史 [1989]、「わが国債券市場固有の現象と期間構造分析」『フィナンシャル・レビュー』第14号、大蔵省財政金融研究所
- 菊池健太郎・新谷幸平 [2012] 「本邦国債価格データを用いたゼロ・クーポン・イールド・カーブ推定手法の比較分析」『IMES Discussion Paper』、Vol.2012, No.J-3, February 2012
- 藤井眞理子・高岡慎 [2008] 「金利の期間構造とマクロ経済：Nelson Siegel モデルを用いた実証分析」『FSA リサーチ・レビュー』第4号。
- Anderson, N., and J. Sleath [1999] "New Estimates of the UK Real and Nominal Yield Curve," *Bank of England Quarterly Bulletin*, November.39. pp. 384-392.
- Bank for International Settlements [2005] "Zero-coupon Yield Curves : Technical Documentation," *BIS paper*, No. 25.
- Carleton, W. T., and I. A. Cooper [1976] "Estimation and Uses of the Term Structure of Interest Rates," *The Journal of Finance*, Vol.31, No.4, pp.1067-1083
- Choudhry, M., and M. Lizzio [2015] *Advanced Fixed Income Analysis*, Second Edition, Butterworth-Heinemann
- Eom, Y.H., M.G. Subrahmanyam, and J. Uno [1998] "Coupon Effects and the Pricing of Japanese Government Bonds : An Empirical Analysis," *The Journal of Fixed Income* 8 (2) , pp. 69-86.
- Fisher M., D.W. Nychka, and D. Zervos [1995] "Fitting the Term Structure of Interest Rates with Smoothing Splines," *Federal Reserve System Working Paper*.
- Gürkaynak, R.S., B. Sack, and J. Wright [2007] "The U.S. Treasury Yield Curve : 1961 to the Present," *Journal of Monetary Economics*, 54 (8) , pp. 2291-2304.
- Hattori, T. and H. Miyake [2016a] "Yield Curve for Japanese Agency Bonds : From 2002 to the Present," *MPRA Paper*, No. 71487.
- Hattori, T. and H. Miyake [2016b] "The Japan Municipal Bond Yield Curve : 2002 to the Present," *International Journal of Economics and Finance*, 8 (6) , pp.118-128.
- Hougllet, M.X. [1980] "Estimating the Term Structure of Interest Rates for Non-homogeneous Bonds," Ph.D Dissertation, University of California Berkeley
- Jarrow, R, D. Ruppert, and Y. Yu [2004] "Estimating the Interest Rate Term Structure of Corporate Debt with a Semiparametric Penalized Spline Model," *Journal of the American Statistical Association*, 99 (465) , 2004, pp. 57-66.
- Jordan, J.V and S.A. Mansi [2003] "Term Structure Estimation from On-the-Run Treasuries," *Journal of Banking and Finance*, Volume 27, Issue 8, pp. 1487-1509.
- McCulloch, J.H. [1975] "The Tax-Adjusted Yield Curve," *Journal of Finance*, 30 (3) , pp. 811-830.
- Nelson, C. R., and A. F. Siegel. [1987] "Parsimonious Modeling of Yield Curves." *Journal of Business*, 60 (4) , pp. 473-489.
- Oda, N. [1996] "A Note on the Estimation of Japanese Government Bond Yield Curves," *Institute for Monetary and Economic Studies*, Vol.27. No. 96-E-27, Bank of Japan.
- Steeley, J.M. [1991] "Estimating the Gilt-edged Term Structure : Basis Splines and Confidence Intervals," *Journal of Business Finance and Accounting*, 18 (4) , pp. 513-529.
- Subramnian, K.V. [2001] "Term Structure Estimation in Illiquid Markets," *Journal of Fixed Income* 11 (2) , pp.77-86.
- Svensson, L.E. [1995] "Estimating Forward Interest Rates with the Extended Nelson and Siegel Method," *Sveriges Riksbank Quarterly Review*, 3 (1) , pp. 13-26.
- Vasicek, O.A., and H. G. Fong. [1982] "Term Structure Modeling Using Exponential Splines," *Journal of Finance*, 37 (2) , pp.339-348.
- Waggoner, D.F. [1997] "Spline Methods for Extracting Interest Rate Curves from Coupon Bond Prices," *Federal Reserve Bank of Atlanta Working Paper*, 97-10.