2021 年 2 月 18 日

財務総研スタッフ・レポート

コスト・アット・リスク（Cost at Risk, CaR）分析入門

東京大学公共政策大学院/財務総合政策研究所
服部　孝洋*

（ポイント）
政府が国債を発行する際、長い年限の国債を発行することにより借換リスク（リファイナンス・リスク）を軽減できる一方で、調達コストが高くなる可能性を有します。このトレード・オフの関係を定量的に考えるため、先進国では「コスト・アット・リスク（Cost at Risk, 以下 CaR）」分析と呼ばれる手法が幅広く用いられています。本稿では本稿では我が国の債務管理でも参照されている CaR 分析について基本的な考え方を説明するとともに、HJM モデルを用いたシミュレーションの解説を行います。

1. はじめに

国債発行計画とは、財務省が毎年度の予算編成を行うに際し、国の歳入の一部となる国債を年度中にどのように発行するかを定めた計画のことを指します。日本政府は構造的な財政赤字を抱えている状況ですが、国債発行をするうえで、その金額だけでなくその年限をどのように決定するかも極めて重要です。予想外の金利急騰などに伴うリファイナンス・リスクという観点でいえば、債務管理当局は長い年限の国債を発行することにメリットがあります。一方で、長期債を発行することは調達コストの増加につながりえます。

本稿では、そのトレード・オフを定量的に考えるうえで、国債発行計画において参照されている「CaR 分析」の考え方の説明を行います。本稿の第二節で、CaR 分析の基本的な考え方を説明したうえで、どのように国債発行計画で参照されているかの解説を加えます。財務省が実施している CaR 分析では、HJM モデルと呼ばれるスタンダードな金利モデルが用いられていますが、具体的な計算のイメージをつかむためには HJM モデルの概要を把握する必要があります。そこで、第三節ではデンマークのケースに基づき、数式を用いて HJM モデルの説明をしますが、どのようなシミュレーションをしているのか可能な限り直観的な説明を試みます。

* 本レポートの内容は全て[本稿の意見に係る部分は]執筆者の個人的見解であり、財務省あるいは財務総合政策研究所の公式見解を示すものではない。本レポートの作成にあたって、財務省の国債業務関係者、齋藤通雄氏（株式会社産業革新投資機構常務取締役）などから大変貴重なご意見を賜った。記して感謝申し上げたい。ありうべき誤りはすべて筆者に帰する。

2. コスト・アット・リスク（Cost at Risk, CaR）分析とは[1]

(1) CaR 分析導入の経緯

前述の通り、調達コストとリファイナンス・リスクのトレード・オフを考えるうえで、現在、財務省が用いているツールが「CaR 分析」です。CaR 分析が導入されたのは、2000 年代半ばごろです。2003 年に財務省で開催された「公的債務管理政策に関する研究会」では「国債管理政策におけるリスク管理手法について」[2]が議論されており、CaR 分析が他国でどのように用いられているかが議論されています。藤井（2004）は財務総合政策研究所が編集する『フィナンシャル・レビュー』に掲載された論文ですが、債務管理政策における債務分析の重要性を指摘すると同時に CaR 分析導入の可能性を検討しています。

財務省は 2004 年から「債務管理リポート」の発行を開始しましたが、2004 年から 2006 年の債務管理リポートにおいて CaR 分析の考え方がコラムを通じて紹介されるとともに、システム開発を進めているとの報告がなされています。2007 年から、国債発行計画策定の際に CaR 分析による定量的なリスク分析を一つの参考としたという記述が加わり、それ以降、国債発行計画で出てくる定量的な分析の一つとなっています。

藤井（2004）は、2001 年に IMF・世界銀行により公表された「公的債務管理の指針」を引用し、債務管理政策の目的とは「必要な財政資金の調達において、リスクを適切な水準に抑えたうえで中長期的視点から政府の資金調達コストを最小化すること」（p.106）としています。また、同論文では、ベルギーなどが 1980 年から 1990 年代前半にかけて債務管理で困難な事態を経験したことから、債務のコストという観点からリスク管理を発展させたという経緯を説明するとともに、デンマークやカナダなどの CaR 分析の事例を紹介しています。その意味では、CaR 分析は多くの先進国が債務管理を行う上で幅広く使われている手法であると解釈することができます。

(2) 調達コストとリファイナンス・リスクのトレード・オフ

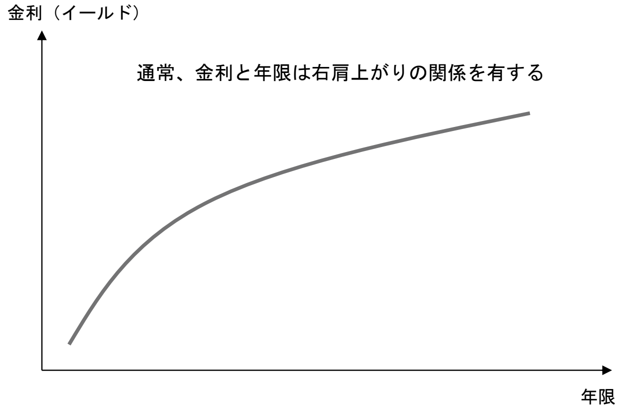
リファイナンス・リスクとは、一定期間にわたって資金調達が必要な場合に、調達が必要な期間よりも短い期間での資金調達を行い、必要期間内に借換え（リファイナンス）を行う際に、金利が変動し得るリスクです。債務管理当局が一定期間資金調達を行う場合、短期債を発行して調達を繰り返す方法と長期債を発行する方法があります。短期調達を繰り返した場合、将来金利が急騰すると、借換の際に急激に調達コストが上昇するということが起こりえます。一方、長い年限で調達しておけば、前述のような金利急騰が起こったとしてもそのリスクにさらされにくいと

[1] 本節を記載するにあたり、後藤勇人氏のサポートを得ました。記して感謝申し上げます。
[2] 「公的債務管理政策に関する研究会（第６回、平成 15 年６月６日開催）」を参照しています。

いうメリットがあります。

短期債の代わりに長期債で調達した場合のデメリットは、調達コストが増加することです。長期債を発行することが調達コスト増につながる理由は、イールドカーブが右肩上がりになっている（順イールドになっている）ためです。イールドカーブとは、図 1 に示しているように、縦に金利（イールド）、横に年限をとったときのカーブですが、我が国では 1990 年代前半など一部の例外を除き、短期債に比べ長期債の方に高い金利が付されています。そのため、例えば、1 年債に 1%、2 年債に 2%の金利が付されていた場合、1 年債で調達した場合、金利負担は 1%ですが、2 年債で調達した場合は、その倍の 2%を支払う必要が出てくるわけです。このことが、長期債を発行したことが短期的にみて調達コスト増につながる主因です。

図 1 金利と年限（イールドカーブ）のイメージ



イールドカーブが右肩上がりになっている背景には様々な理由がありますが、その一因は、投資家がより長い債券に投資する場合、より高い金利リスクをとっていることから、高い利回りを要求する傾向があるためです（これに伴うプレミアムをターム・プレミアム（流動性プレミアム）といいます）。詳細は服部（2020b）で説明していますが、長期債に投資することは相対的に高い金利リスクをとることを意味します[3]。投資家が相対的に高いリスクの金融商品に対してプレミアムを求めることを考えると、長期債を発行することは政府にとってターム・プレミアム（流動性プレミアム）を負担することにつながることから、長期的にみても調達コスト増につながる可能性を有します（イールドカーブが右上がりになる要因はこれ以外にもありますが、詳細はコラムや服部（2019）を参照してください）。

[3]金利の変化に対する価格感応度（デュレーション）が債券の年限におおよそ一致するという特性を有しますが、詳細は服部（2020b）をご参照ください。

もっとも、長期債を発行することが調達コスト増につながらないケースもありえます。例えば、英国のイールドカーブをみると、30 年債の金利より、40 年や 50 年債の金利の方が低いという現象が起こっています。これは特に年金が Asset Liability Management（ALM）[4]の観点で超長期国債に高いニーズを有していることなどが背景にあります（詳細は中対・村田（2018）をご覧ください）。もちろん、どのような年限の国債に需要があるかは各国の金融システムや金融機関の状況に依存しますし、日本の場合、30 年金利より 40 年金利の方が高い傾向にあります。しかし、単純に長期債の発行が負担増につながるとは限らず、投資家の需要に沿った発行計画を立てることは、政府にとって調達コストの低下につながることがありうることを認識しておくことは大切です。財務省は「国債投資家懇談会」、「国債市場特別参加者会合」などの形で投資家とのコミュニケーションを取っています。

＜コラム＞　イールドカーブと調達コストの関係

本文で説明しましたが、通常イールドカーブは右肩上がりになっています。もっとも、イールドカーブが右肩上がりであるという事実だけで、必ずしも長い目で見た場合、調達コスト増にはなるとは限らない点に注意が必要です。本文の例を挙げれば、1 年債の金利が 1%、2 年債が 2%でしたが、仮に 1 年債で当初調達したとしても、1 年後再度国債を発行する際、1 年金利が例えば 3%などと、2%より高くなっている可能性もあります。実は長期金利には本文で述べたターム・プレミアムだけでなく、将来の短期金利の予測も反映されています。詳細は服部（2019）で議論されていますが、期待仮説が成立していればどのような年限で発行してもコストは一緒です。もっとも、実際には期待仮説は実証的には成立しておらず、投資家は長期債に対して追加的なプレミアムを求める傾向があるため、政府が長期債で調達した場合、このプレミアムを負担するという意味で、調達コスト増につながっているといえます。

(3) CaR 分析の考え方

リファイナンス・リスクと調達コストのトレード・オフを定量的に考えるツール

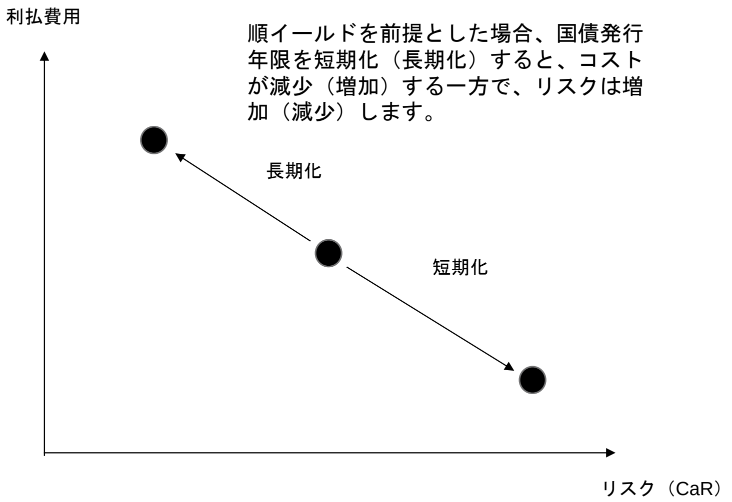
まず押さえておくべき点は、前述の通り、CaR 分析とは債務管理当局がリファイナンス・リスクと調達コストのトレード・オフを定量的に考えるツールであることです[5]。この概念を描いた図が図 2 ですが、横軸をリスク、縦軸をコストとすると、調達年限を長期化するにつれリファイナ

[4] 金融機関は金利リスクを管理することから、資産と負債の年限を合わせるようにリスク管理をしており、これを Asset Liability Management（ALM）といいます。金利リスクや ALM については服部（2020b）を参照してください。

[5] 財務省の債務管理リポートでは「CaR 分析とは、将来金利の時系列推移を確率金利モデルで表現し、国債発行計画や国債残高から生じる将来の利払費率の分布を計測することで、その特徴を把握するもの」と説明しています。

ンス・リスクが減りますが、イールドカーブが順イールド（右上がり）の場合、年間の利払費用が上がる可能性があります。一方、調達年限を短期化すると、リファイナンス・リスクは上がりますが、年間費用を落とすことができる可能性があります。CaR は「Cost at Risk」の略称ですが、CaR そのものは債務管理当局が将来負担しうる調達コストのリスクを表します。例えば長い年限で調達した場合、調達コストの変動を抑えられる一方、短い年限の国債で調達した場合、調達コストが変動しうることを考えると、CaR にリファイナンス・リスクが反映されると解釈できます。

図 2　CaR 分析におけるコストとリスクの関係（イメージ）



出所：財務省「債務管理リポート 2005」（p.55）基に筆者作成。

金融機関でも、バリュー・アット・リスク（Value at Risk, VaR）と呼ばれるリスク管理の指標が幅広く用いられていますが、VaR も定量的にリスク量を測定する方法です。VaR を用いてリスク管理を行う場合、例えば、過去の債券の金利データを用いて、「過去発生した金利上昇を数え上げたとき、悪い（良い）シナリオのうち上位 1%（99%）番目の金利上昇シナリオ」という形で金利リスク量を算出します。過去には様々な金利上昇があったわけですが、その一番激しい金利上昇ではなくて、激しい金利上昇からソートして 1%番目の金利上昇（つまり、金利低下から数えて 99%番目の金利上昇）を選択することで現実的な最悪なシナリオ（テール・リスク）とするという発想です。この値を統計の用語では 99%タイル値（1%タイル値）といいますが[6]、このアイデアは実際の規制で用いられることもあります。例えば、バーゼル規制におけるアウトライヤー規制において、銀行勘定の金利リスクを把握する場合、過去 5 年の金利変化の 99%タイル値がリスク量

[6] しばしば VaR は過去の経験に基づく「最大損失額」と説明されますが、過去に経験した最大損失額ではなく、例えば 99%の信頼区間の中で最大の損失額を選択しています。

の一つとして用いられていました[7]。ちなみに、99%タイル値ではなくて、99.9%タイル値を使うことで、より保守的な値を算出することもできますが、金融機関のリスク管理の多くのケースでは99%タイル値が用いられています[8]。

金利モデルに基づくシミュレーションを用いる背景

前述のとおり、CaR 分析でもリスク量を測るときデータに基づいた 1%タイル値（99%タイル値）が用いられていますが、VaR は過去の実際の金利の動きに基づき 1%タイル値（99%タイル値）を計算します。一方、CaR 分析では、金利モデルを用いてシミュレーションを行うことでリスク量を算出します。具体的には、後述する HJM モデルと呼ばれる金利モデルを用い、過去のデータからモデルのパラメータを推定したうえで、乱数を発生することで金利パスを発生させ、そのパスの中から、1%タイル値（99%タイル値）を計算することでリスク量を算出します。明示的な金利モデルを用いず、過去のデータをそのまま用いて 1%タイル値（99%タイル値）をリスク量とすることもできます。もっとも、この手法では、「過去が将来を正確に表している」という仮定が必要になりますが、この仮定がいつも正しいとは限りません。一方、シミュレーションを用いる方法は、複雑な分布やモデルを取り扱うことを可能にします（もっとも、シミュレーションを用いた方法でも、過去のデータを用いてパラメータを推定しており、そのパラメータが変化しないと想定しています[9]）。ジョリオン（2003）はシミュレーションによるリスク量の算出は「圧倒的に最も強力な手法」としたうえで、同手法が捉えるものとして「幅広いレンジのエクスポージャーやリスクであり、非線形な価格リスク、ボラティリティリスク、ファット・テイル、極端なシナリオを含んでいる」（p.286）としています。

シミュレーションを用いることの欠点は計算負荷が大きい点です。金融機関がリスク管理を行う場合は日々リスク量をモニターする必要があるため、迅速な計算が必要であり、この欠点は看過できません。しかし、政府の場合、毎日計算するというよりは例えば国債発行計画策定のときなどに参考とすることが多いため、計算負荷というデメリットが相対的に少なく、シミュレーションを用いたリスク量の算出のメリットが大きいと解釈することができます。

---

[7] バーゼル 2 における「アウトライヤー規制」では 99%タイル値の計算が求められていましたが、2018 年 3 月期から国際統一基準行に適用が開始された銀行勘定の金利リスクに対する規制（いわゆる IRRBB, Interest Rate Risk in the Banking Book）では金利リスクを把握するうえで 99%タイル値は用いられておらず、「パラレル上・下、スティープ、フラット、短期上・下」という 6 つのシナリオが用いられています。

[8] CaR に近い考え方として、金融機関のリスク管理の現場では「アーニング・アット・リスク（Earning at Risk, EaR）」も用いられています。三菱東京 UFJ 銀行（2012）でも「CaR は、銀行 ALM（資産負債管理）におけるアーニング・アット・リスク（EaR）に近い概念である」（p.92）と指摘しています。詳細は三菱東京 UFJ 銀行（2012）を参照してください。

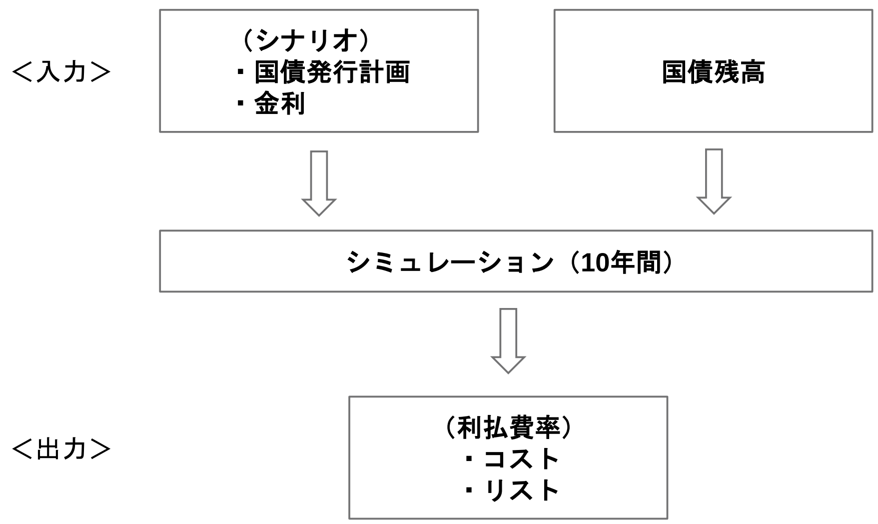
[9] パラメーターが時間に依存するようなモデルもあります。

(3) 実際の分析結果の紹介

CaR 分析がどのように用いられているかについてもう少し具体的にみていきましょう。CaR 分析が用いられる典型的な場面は、政府が新たに国債を発行しようとしているケース、すなわち国債発行計画を検討しているときです。この際、政府が将来直面しうる債務のコストとリスクを算出するには、政府の今抱えている債務残高およびその満期構成を前提に、将来の金利シナリオを想定する必要があります。

図 3 はフレームワークのイメージを示しています。まず、CaR を計算するためのインプット（入力）は、シナリオである（a）国債発行計画（国債発行額および年限の内訳）および（b）金利シナリオに加え、（c）現時点での国債残高になります。これらをインプットとしたうえで、10 年間のシミュレーションを行い[10]、コストとリスクを算出します。大切なことは、インプットを変えるとアウトプット（出力）であるコストとリスクも変わってくるということです。特に重要なインプットは、翌年度どのように国債を発行するかを決める「国債発行計画」です。国債発行計画では、例えば、40 年債など長期の国債を多く発行する計画もあれば、短期債を中心に調達する計画もありうるわけですが、これら別々の計画をインプットとして用いれば、異なるコストとリスクが得られます。そして、様々な発行計画におけるコストとリスクを比較することで、現在考えている発行計画がどういう性質をもっているかを参照することが可能になるわけです。

図 3　CaR 分析のフレームワーク

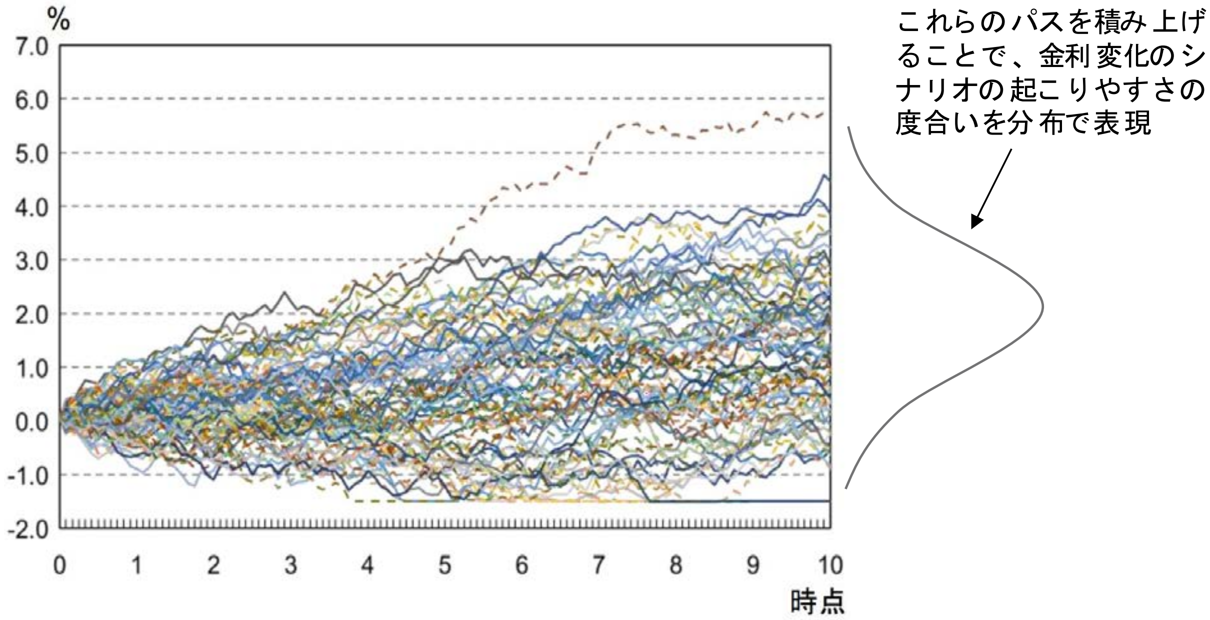


出所：「債務管理リポート」（2020）図 c４－１より抜粋。

10 「後年度影響試算等」における「国債整理基金の資金繰り状況等についての仮定計算」でも 10 年間のパスが算出されています。

CaR 分析における金利のシナリオについては、前述の通り、乱数を用います。次節で説明しますが、HJM と呼ばれる標準的な金利モデルを想定し、乱数を用いて様々な金利シナリオを発生させます。図 4 は 10 年金利の推移ですが、金利が 5%程度大幅に上昇するシナリオもあれば現状維持になるものもあります。これらのパスを積み上げることで、金利変化のシナリオの起こりやすさの度合いを表現します（つまり、図 4 の右側にあるような金利変化の分布を作成します）。

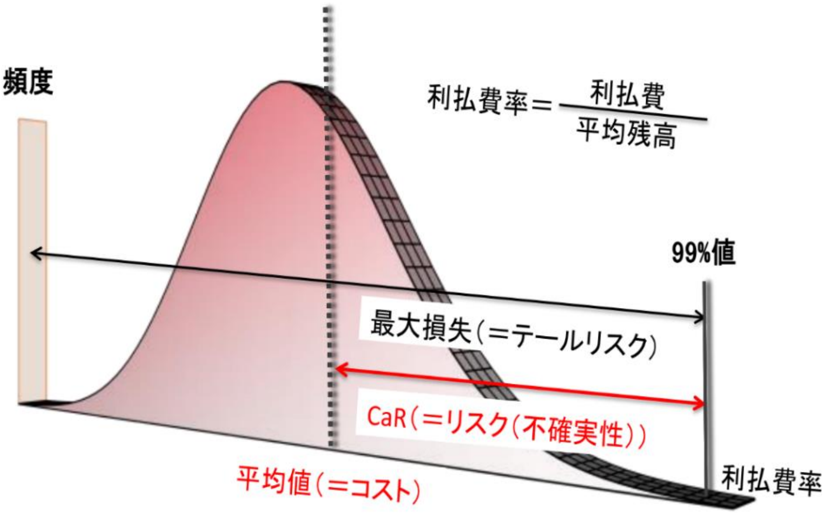
図 4 10 年金利のシミュレーション



出所：財務省「国の債務管理の在り方に関する懇談会(第 50 回)」資料に筆者加筆。

図 5 は図 4 で発生させた無数の 10 年金利のパスから作成した分布です。CaR 分析では、国債発行計画で発行する国債およびこれまでの残高を加味したうえで様々な金利のパスを出すことで利払のシナリオを作り（ここでの利払は、「利払費/平均残高（＝利払費率)」としています)、これを積み上げることで利払の分布を作ります。図 5 がそのイメージ図になりますが、横軸はコスト（利払費率）を表し、縦軸はそのコストが実現する頻度（起こりやすさ）を表します。この図の分布はいわゆる釣り鐘になっており、平均値周辺のコストが実現する頻度が高くなっており、大幅な金利上昇により調達コストが増大するようなイベントは稀であることを表現しています。

図 5　シミュレーションの結果算出されるコストの分布



出所：財務省「国の債務管理の在り方に関する懇談会(第 50 回)」資料に筆者加筆。

シミュレーションから得られる分布を用いれば、（国債発行に係る）利払費のコストとリスクを把握することができます。CaR 分析では、シミュレーションの結果出てきた分布の平均値がコストとして用いられます[11]。一方、リスクについては、前述した 99%タイル値（図内では「99%値」と記載されています）を計算し、上述の平均値からの乖離をとることで算出します。この乖離は、平均的なコストに比べ、最悪のシナリオ[12]でどの程度調達コストが上振れるか（図 5 におけるリスク（不確実性））を示しています。前述のとおり、CaR とは Cost at Risk の略称であり、債務管理当局が負担しうる調達コストの不確実性でしたが、具体的にはこの不確実性（パーセンタイル値と平均値の乖離）が CaR の定義として用いられています[13]。気を付けるべき点は、図 5 で描かれる分布はある一つの国債発行計画のシナリオに基づくため、異なる発行計画をインプットとすれば異なる分布が生まれ、異なるコストやリスク（CaR）が計算される点です。国債発行計画の策定の際に参考にするためには、異なるインプット（異なる国債発行計画）を比較検討する必要がありますから、異なる国債発行計画がもたらすコストとリスクのトレード・オフを定量的に把握することが重要なわけです。

財務省は、国債発行計画を策定する上で、CaR 分析の結果も参考にしていると指摘しています。例えば、2019 年に開催された「国の債務管理の在り方に関する懇談会」では、「20 年債などの発

---

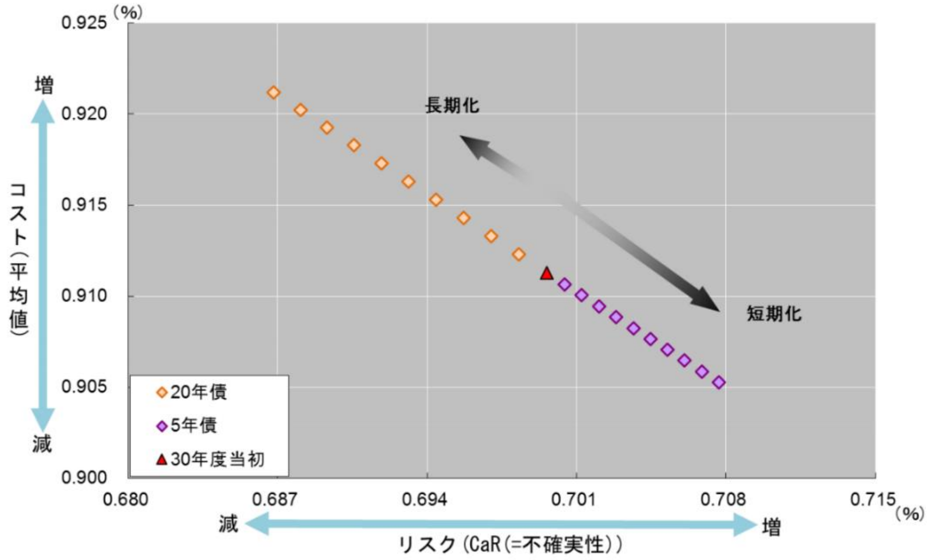
[11] ファイナンスでは、資産価格の変化率の分布において、平均を期待リターン、分散をリスクとすることしますから、このように取り扱うことは標準的なファイナンス理論の想定です。

[12] 発生しうるすべての中で「最悪なシナリオ」を想定しているのではなく、99%の信頼区間で「最悪なシナリオ」を想定しています。

[13] 三菱東京 UFJ 銀行（2012）は「CaR とは、将来の金利シナリオの確率分布を作成し、対象期間に一定の確率で生じうる最大のコスト（利払費）をリスク量とするものであり、シミュレーションで作成した将来の特定年度における利払額の分布のパーセンタイル値と平均値との差を CaR と定義することが多い」（p.90）と指摘しています。

行を増やし年限の長期化をするとコスト増・リスク減、5 年債などの発行を増やし年限の短期化をするとコスト減・リスク増となる（トレード・オフの関係が成立している）」[14]と指摘しています。図 6 は特定の年限の発行額を国債発行計画から 0.5%ずつ増加させ、同時に総発行額は同額となるように、他の年限を均等に減少させるという形で、複数の発行計画をインプットとして用いています。

図 6　財務省により算出されたコストとリスクの関係



（注）特定の年限の発行額を国債発行計画から0.5%ずつ増加させ、同時に総発行額は同額となるように、他の年限を均等に減少させる。

出所：財務省「国の債務管理の在り方に関する懇談会(第 50 回)」資料に筆者加筆。

強調しておきたい点は、CaR 分析はあくまでトレード・オフの関係を定量的に確認するツールであり、このツールだけで特定の発行計画が最適であることを決定できるわけではないことです。ファイナンスの理論におけるポートフォリオ選択との類似性で議論すれば、ポートフォリオ選択では縦軸に（コストではなく）リターン、横軸にリスクを置き、そのトレード・オフを考えるわけですが、CaR 分析はいわばポートフォリオ選択における効率的フロンティアを導出するイメージになります。したがって、効率的フロンティアだけでは、特定のポートフォリオが最適であることを決定できないのと同様、CaR 分析だけで最適な発行計画を決めることはできません。経済学の分析では、家計にとって最適なポートフォリオを決定する場合、無差別曲線を導入します。例えば政府の無差別曲線を導入して最適な発行年限を定めることも考えられますが、例えば関数形などに合意を得ることができず、実務的に困難といえましょう。その意味では、具体的な年限

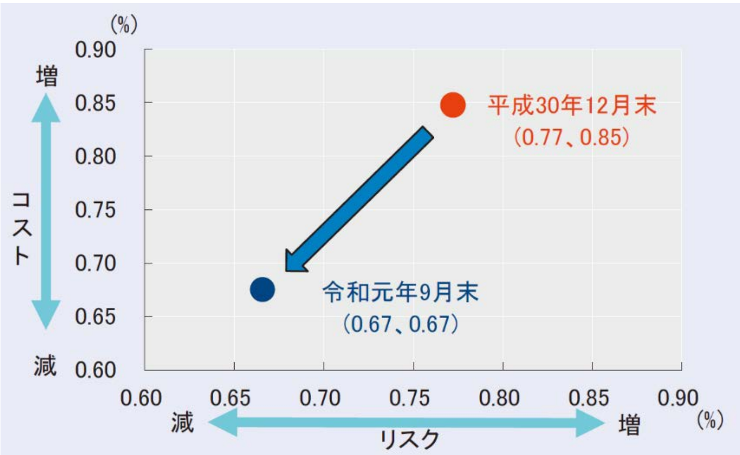
[14] 財務省「国の債務管理の在り方に関する懇談会(第 50 回)」資料を参照。

を決定するにあたっては債務管理当局と投資家の間の対話の中で検討する必要があるわけです。

CaR 分析に対する別の見方をすれば、投資家とのコミュニケーションの中で決定された国債発行計画が定量的にどのようなリスクとコストのプロファイルを持つかについて、例えば過去の経験などと比べながら偏った発行がなされていないかなどについて定量的にチェックするツールと解釈することもできます。例えば、図 7 は 2020 年の「債務管理リポート」の図を抜粋していますが、これをみると、2018 年はコストおよびリスクともに前年に比べて抑えた発行ができたと評価できます。一方で、コストおよびリスクともに悪化するような発行が仮に続いたとしたら、債務管理当局に対して財政健全性の警告等が発せられていると解釈することもできます。

コロナ禍によりこれまでにない規模で国債の発行がなされていますが、CaR 分析は一定の警鐘を鳴らす結果を示しています。例えば 2020 年 11 月に開催された「国の債務管理の在り方に関する懇談会」では、「(新型コロナ対応に伴う) 短期債を中心とする幅広い年限の国債大増発により、コストおよびリスクが共に増加。特にリスクが大きく増加。」「今後、増大したコストやリスクを縮小していく観点からは、財政健全化の取組等を通じて国債発行額の抑制に努めつつ、市場のニーズ等を踏まえた年限構成割合がこれらに与える影響を注視していくことが重要。」としています。

図 7　コストとリスクの関係



出所：「債務管理リポート」(2020) 図 c４－３より抜粋。

3. HJM モデルを用いたシミュレーションのイメージ[15]

(1) HJM モデルとは：フォワード・レートを用いたフレームワーク

前述の通り、CaR 分析では金利のパスを発生させると説明しましたが、実際のシミュレーションに当たっては HJM（Heath–Jarrow–Morton, ヒース・ジャロー・モートン）モデルと呼ばれる金利モデルが用いられています。HJM モデルは、デイビット・ヒース、ロバート・ジャロー、アンドリュー・モートンによって 1992 年に Econometrica という学術誌で公表された金利モデルであり、学術的に非常に評価の高く、実務的にも良く使われるスタンダードな金利モデルです。もっとも、HJM モデルはフォワード・レートに基づくいわば「フレームワーク」であり、幅広い金利モデルを含む概念です。櫻井（2016）は「HJM モデルは、すべての期間構造モデルに無裁定性の枠組みを与えたものであり、つまり、すべての無裁定期間構造モデルは HJM モデルの 1 つのバージョンとみなすことができる」（p.220）と整理しています[16]。そのため、HJM モデルに基づいているといっても、そのモデルの含意を考えるには具体的なモデルを考える必要があります。

本節では数式を用いた説明を行いますが、本節の特徴は、(1) モデルの詳細が開示されているデンマークのケースを取り上げること、(2) HJM モデルに係る数式の導出は省略し、HJM のモデルを前提にどのようにシミュレーションをしているかについてフォーカスする点です。デンマークのモデルは Danmarks Nationalbank（2001）に詳細に説明されており、これをベースに HJM モデルの概要とともに、どのようにイールドカーブ全体のシミュレーションをしているかを説明します。ここではオリジナルのソースを参照できるように数式の導出や式の notation も含め、Danmarks Nationalbank（2001）に則ります。また、HJM モデル自体は非常にテクニカルなモデルであり（正確な理解のためには大学院レベルの数理ファイナンスの知識が求められます）、ここではモデルの結論を紹介するにとどめ、どのようにシミュレーションをしているかに焦点をあてます。HJM モデルの数式の展開を知りたい読者はバクスター・レニー（2001）、シュリーブ（2012）や Brigo and Mercurio（2006）など大学院レベルの数理ファイナンスのテキストを読むことをお勧めます。

強調しておきたいことは、金利リスクを用いたシミュレーションをしているからといって、実際のデータと無関係ではない点です。金利モデルとして HJM モデルが用いられていますが、後述するとおり、実際にシミュレーションをするにあたっては、過去のデータを使ってモデルのパラメータを推定しており、そのパラメータに基づいたシミュレーションがなされています。その意味で、シミュレーションの結果は過去の金利の動きが反映されたものになっているといえましょ

[15] 本節を記載するにあたり、石田良氏、藤原哉氏のサポートを得ました。記して感謝申し上げます。

[16] 櫻井（2016）は、HJM モデルの特徴として、「①フォワード金利モデルである、②マルチ・ファクター・モデルである、③変数の設定の自由度が高い、④マルコフ過程になるとは限らない」（p.219）という 4 つの特徴を指摘しています。

う。

(2) HJM モデルの概要：Ritchken and Sankarasubramanian（1995）

ここから具体的に HJM モデルについて考えていきます。まず HJM モデルでは、フォワード・レートを下記のようにモデル化します。

$$df(t,T) = \mu_f(t,T)dt + \sigma_f(t,T)dW(t) \tag{1}$$

$df(t,T)$は満期T、時点tのフォワード・レートです（フォワード・レートの概念を知りたい読者は服部（2019）をご参照ください。）。$\mu_f(t,T)$と$\sigma_f(t,T)$はドリフトとボラティリティであり、それぞれtとTに依存します。$dW(t)$はウィーナー過程です。$\sigma_f(t,T)$と$dW(t)$はスカラーです（これらの概念の詳細はハル（2016）を参照してください。このモデルはハル（2016）で説明されているようなシンプルな 1 ファクターのモデルになっています）。これを 1 ファクターHJM モデルといいますが、後述する Ritchken and Sankarasubramanian（1995）も 1 ファクターHJM モデルです。しかし、式（1）を行列で表現してマルチ・ファクターHJM モデルを考えることもできます[17]。

実は式(1)だけだと、金融市場で満たしてほしい無裁定条件を満たすとは限りません。HJM(1992)は無裁定条件を満たすためにはドリフトとボラティリティは下記の関係を持つ必要があることを示しました[18]。

$$\mu_f(t,T) = \sigma_f(t,T)\int_t^T \sigma_f(t,u)du \tag{2}$$

前述の通り、HJM モデルは「フレークワーク」ですので、実際に計算するためには上記のモデルを特定化する必要があります。具体的には、ボラティリティの関数形を特定化する必要があるのですが、市場で観察されるボラティリティ・スマイル（ボラティリティ・スマイルの概念については服部（2020a）をご参照ください）に合わせることが可能な柔軟性を持ちつつ、数学的な扱いが比較的簡単となるボラティリティの関数形が 90 年代に提案されており、それらは Quasi-Gaussian Model あるいは Pseudo-Gaussian Model と呼ばれています。Danmarks Nationalbank（2001）では、Ritchken and Sankarasubramanian（1995）が提唱するモデルを用いていますが、Ritchken and

17 例えば、Brigo and Mercurio（2006）では、$\sigma_f(t,T) = (\sigma_{f1}(t,T),\dots,\sigma_{fN}(t,T))$と$W = (W_1,\dots,W_N)$としたうえで、マルチ・ファクターHJM から議論をスタートしています。ハル（2016）では 1 ファクターモデルをベースに説明をしていますが、複数のファクターに拡張できることが簡単に触れられています。

18 ここまでの展開の詳細は例えばハル（2016）の 32.1 節をご参照ください。

Sankarasubramanian（1995）は Quasi-Gaussian Model の一種であり、HJM モデルを計算するためのモデルとして大学院レベルの金利デリバティブの教科書でよく取り上げられるモデルです[19]。その意味では、デンマークの CaR 分析のシミュレーションでは Ritchken and Sankarasubramanian（1995）に基づくことで HJM のフレームワークの中で最もスタンダードかつシンプルなモデルが活用されていると解釈できます。

Ritchken and Sankarasubramanian（1995）はボラティリティに対して下記のような特定化を行い[20]、

$$\sigma_f(t,T) = \sigma_f(r(t))^{\gamma} e^{-\kappa(T-t)} \tag{3}$$

上記を前提に国債（ゼロクーポン債）の価格が下記になることを示しました。

$$P(t,T) = \frac{P(0,T)}{P(0,t)} exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{1-e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa}\right)^2 \sigma^2 \int_0^t r(u)^{2\gamma} e^{-2\kappa(t-u)} du + \frac{1-e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa}(f(0,t)-r(t))\right\} \tag{4}$$

前述のように HJM モデルはフォワード・レートを用いたフレームワークともいえるものであり、その意味では非常に抽象的なモデルです。しかし、Ritchken and Sankarasubramanian（1995）は一定の制約を課すことで国債価格を上記のように明示的（explicit）に書き下すことができる点が最大の強みです。Brigo and Mercurio（2006）は Ritchken and Sankarasubramanian（1995）の提唱する工夫をすることで計算上の効率性を上げることが可能になることを指摘しています。

なお、スポット・レート[21]とフォワード・レートは$r(t) = f(t,t)$という関係を持つことを考えると、Ritchken and Sankarasubramanian（1995）の制約の下では、スポット・レートの動きは下記のようにモデル化できます[22]。

$$dr = \left\{\kappa\big(f(0,t) - r(t)\big) + \phi(t) + \frac{d}{dt} f(0,t)\right\} dt + \sigma r(t)^{\gamma} dW(t) \tag{5}$$

---

[19] 例えば、Brigo and Mercurio（2006）やショウドリー（2010）などで取り上げられています。このモデルは 1 ファクターモデルですが、Ritchken and Sankarasubramanian（1995）を多数のファクターに拡張したものとして、Inui and Kijima（1998）があります。

[20] フォワードのボラティリティが①フォワード・レートの年限（$T-t$）と②ゼロ・クーポン・イールドのボラティリティ（$\sigma_f(r(t))^{\gamma}$）という 2 つの要因に依存するという制約を課しています。

[21] 金利デリバティブでは「スポット・レート」は瞬間的な短期金利を指すことが多いですが、割引債の利回り（ゼロ・クーポン・イールド）を「スポット・レート」と表現することもあるので注意が必要です。

[22] Ritchken and Sankarasubramanian（1995）や Brigo and Mercurio（2006）を参照してください。

なお、$\phi(t)$は integrated volatility factor であり、下記のように表現できます。

$$\phi(t) = \sigma^2 \int_0^t r(u)^{2\gamma} e^{-2\kappa(t-u)} du \tag{6}$$

ここまでが Ritchken and Sankarasubramanian（1995）が提唱した HJM モデルの概要です。式 (4) は非線形のモデルですが、ゼロ・クーポン債の価格のデータを使えば、σ, κ, γを推定することがすることができます。Danmarks Nationalbank（2001）では 1994 年から 2001 年の月次データを使って、このパラメータを一般モーメント法（GMM）[23]で推定した場合、$\hat{\sigma} = 0.02861, \hat{\kappa} = 0.08889, \hat{\gamma} = 0.4077$という値が得られることを紹介しています。

なお、上記はすべて連続型（微分を含む形）で示しましたが、実際の計算を行うためには、離散型にして計算する必要があります。(4)、(5)、(6) の離散型はそれぞれ下記のようになります[24]。

$$P(i,j) = \frac{P(0,j)}{P(0,i)} exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{1-e^{-\kappa(j-i)\Delta t}}{\kappa}\right)^2 \phi(i) + \frac{1-e^{-\kappa(j-i)\Delta t}}{\kappa}\big(f(0,i) - r(i)\big)\right\} \tag{4$'$}$$

$$\Delta r(i+1) = \left\{\kappa\big(f(0,i) - r(i)\big) + \phi(i) + \frac{f(0,i+1) - f(0,i)}{\Delta t}\right\}\Delta t + \sigma r(i)^\gamma Z(i) \tag{5$'$}$$

$$\phi(i+1) = e^{-2\kappa\Delta t}\left\{\phi(i) + \frac{\sigma^2 r(i)^{2\gamma}}{2\kappa}\left(1 - e^{-2\kappa\Delta t}\right)\right\} \tag{6$'$}$$

(3) HJM モデルを用いたシミュレーションのイメージ

まず、下記の通り、現時点でのゼロ・クーポン・イールドがデータとして得られるとします[25]。これは 1 年債の金利から 40 年債の金利のデータというイメージをもってください。

$$y(0,0), y(0,1), y(0,2), \dots, y(0,n)$$

$y(i,j)$はi時点における満期jのゼロ・クーポン・イールドを表しています。ゼロ・クーポン・イ

---

23 GMM とはモデルのパラメータを推定する手法の一つであり、計量経済学の学部上級から大学院レベルのテキスト・講義で紹介されます。GMM のイメージを掴みたい読者は浅野・中村（2009）、本格的な理解をしたい読者は Hayashi (2000)を読むことが一案です。

24 ここでの数式の表記については Danmarks Nationalbank（2001）に倣いました。デンマークのモデルは月次ベースでシミュレーションをしているため、実際に計算する際には、Δt=1[月次]を代入していると思われます。

25 これらの値は Bloomberg から取得することもできますし、利付債の利回りから推定することで取得することもできます。

ールドを用いると、国債価格（割引債の価格）とフォワード・レートが算出できます[26]。

$$P(0,0), P(0,1), P(0,2), \dots, P(0,n)$$
$$f(0,0), f(0,1), f(0,2), \dots, f(0,n)$$

ここからがシミュレーションの説明になります。まず$(5)'$を考え、まず一期目（$i = 1$）を考えると下記が成立します。

$$\Delta r(1) = \left\{\kappa\big(f(0,0) - r(0)\big) + \phi(0) + \frac{f(0,1) - f(0,0)}{\Delta t}\right\}\Delta t + \sigma r(0)^{\gamma} Z(0) \tag{7}$$

まず、$f(0,0), f(0,1), r(0)$はスタート時点の価格（現時点の価格）ですから、この部分のデータは取得できます。また、σ, κ, γは先ほど説明したように過去のデータを用いて推定した値（$\hat{\sigma}, \hat{\kappa}, \hat{\gamma}$）を使います。そのため、(7) において分からないものは、$\phi(0)$と$Z(0)$ですが、$\phi(0) = 0$とし、$Z(0)$はウィーナー過程に基づく動きをするため、正規分布に従うことを考え、平均 0、分散Δtとしたうえで、コンピュータを使って正規分布に基づく乱数を発生させます（この乱数は算出するたびに異なる値をとる点に注意が必要）。この乱数を用いれば、(7) の右辺がすべてわかるため、$dr(1)$が計算できます。

ここまでで t=0 期までの値が計算できましたが、次に t=1 の動きを考えます。まず、t=1 のショートレート、すなわち、$r(1)$は、t=0 のショートレートに対して、その間の動きである$\Delta r(1)$が加わりますから、下記のようにして計算できます（$r(0)$と$dr(1)$は既知ですから、$r(1)$がわかります）。

$$r(1) = r(0) + \Delta r(1) \tag{8}$$

また、t=1 における integrated volatility は$(6)'$を考え、下記の通り計算します（右辺の変数はすべて既知である点に注意）。

$$\phi(1) = e^{-2\kappa\Delta t}\left\{\phi(0) + \frac{\sigma^2 r(0)^{2\gamma}}{2\kappa}\left(1 - e^{-2\kappa\Delta t}\right)\right\} \tag{9}$$

---

[26] ゼロ・クーポン・イールド、ゼロ・クーポン債の価格、フォワード・レートの価格は下記のような関係を持ちます。

$$y(t,T) = -\frac{1}{T-1} lnP(t,T) = \frac{1}{T-t}\int_t^T f(t,s)ds$$

このように(5)′および(6)′をベースに、乱数を発生して$r(1),\ \phi(1)$を算出できました。同じように乱数を発生させて同様の計算をすれば、さらに 1 期先の値である$r(2), \phi(2)$が計算できます（その際下記の式に基づきます。また、t=0 では初期値として$\phi(0) = 0$と置きましたが、t=1 では(9)で$\phi(1)$が算出されている点に注意してください)。

$$\Delta r(2) = \left\{\kappa\big(f(0,1) - r(1)\big) + \phi(1) + \frac{f(0,2) - f(0,1)}{\Delta t}\right\}\Delta t + \sigma r(1)^{\gamma} Z(1) \tag{10}$$

$$\phi(2) = e^{-2\kappa\Delta t}\left\{\phi(1) + \frac{\sigma^2 r(1)^{2\gamma}}{2\kappa}\left(1 - e^{-2\kappa\Delta t}\right)\right\} \tag{11}$$

このプロセスを繰り返していけば、n期間のショートレートの動き（$dr(n)$）と integrated volatility（$\phi(n)$）が計算できます。

重要なことは、このデータを用いれば、様々な年限の国債の価格（金利の期間構造）が描写できることです。例えば、1 期後の 2 年債は(4)′を利用して、下記のように計算できますし、

$$P(1,2) = \frac{P(0,2)}{P(0,1)} exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{1 - e^{-\kappa(2-1)\Delta t}}{\kappa}\right)^2 \phi(1) + \frac{1 - e^{-\kappa(2-1)\Delta t}}{\kappa}\big(f(0,1) - r(1)\big)\right\} \tag{12}$$

1 期後の 3 年債は下記のように計算できます。

$$P(1,3) = \frac{P(0,3)}{P(0,1)} exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{1 - e^{-\kappa(3-1)\Delta t}}{\kappa}\right)^2 \phi(1) + \frac{1 - e^{-\kappa(3-1)\Delta t}}{\kappa}\big(f(0,1) - r(1)\big)\right\} \tag{13}$$

n期間のショートレート（$\Delta r(1), \Delta r(2), \dots, \Delta r(n)$）と integrated volatility（$\phi(1), \phi(2), \dots, \phi(n)$）が得られれば、同様の計算方法で 10 年後（データが月次であると 120 期後）のn年債（ゼロ・クーポン債）の価格が計算できます。

$$\begin{gathered} P(1,2), P(1,3), P(1,4), \dots, P(1,n) \\ P(2,3), P(2,4), P(2,5), \dots, P(2,n+1) \\ \vdots \\ P(120,121), P(120,122), P(120,), \dots, P(120,n+120) \end{gathered}$$

このように国債（ゼロクーポン債）の価格が計算できれば、金利（ゼロ・クーポン・イールド）

が計算できますから、例えば 10 年後の 1 年から 40 年債の金利を計算することができます。

上記の計算で例えば、1－40 年債の金利のパスが一本発生します。重要な点は、このパスは前述のとおり、乱数を用いて計算しているため、もう一度同じ試行を繰り返せば、発生させる乱数は異なる値をとりますから、異なるパスが発生されます。したがって、これを例えば数千回繰り返せば数千個の 1－40 年債の金利のパスを発生させられます（図 4 は 10 年債の金利にのみ絞って計算したパスです）。CaR 分析では、このように発生させた金利のパスのそれぞれについて、現在の国債の満期構成および国債発行計画の下でのコストとパーセンタイル値を計算し、それをすべてのパスについて計算した結果から分布を作成することによって、その国債発行計画によるコスト（＝分布の平均）とリスク（＝パーセンタイル値と平均値の乖離/CaR）のトレード・オフを定量的に把握しています。

4. おわりに

本稿では CaR 分析について包括的に説明を加えました。日本の債務残高の累積を考えると、国債管理政策の重要性はより一層増しているといえましょう。本稿で我が国の事例およびデンマークのモデルの計算方法に焦点を当てましたが、筆者は今後我が国の事例を用いた学術研究を深めるだけでなく、海外における国債管理制度の調査や学術研究のサーベイが必要であると考えています。実際、2019 年に開催された「国の債務管理の在り方に関する懇談会」では米国におけるマクロ計量経済モデルを用いた分析を紹介しており、その動きは出ているとみることができます。今後は海外の文献の紹介などをしていければと考えています。

参考文献

[1]. 浅野晢・中村二朗（2009）『計量経済学』有斐閣
[2]. 櫻井豊（2016）『数理ファイナンスの歴史』きんざい
[3]. S.E. シュリーヴ（2012）『ファイナンスのための確率解析 II（連続時間モデル）』丸善出版
[4]. 中対剛・村田大介（2018）「イギリスの平均償還年限とその背景―国債の需要と供給両面からの分析―」PRI Discussion Paper Series （No.18A-09）
[5]. モーラッド・ショウドリー（2010）『イールドカーブ分析』東洋経済新報社
[6]. マーティン・バクスター、アンドリュー・レニー（2001）『デリバティブ価格理論入門－金融工学への確率解析』シグマベイスキャピタル
[7]. ジョン・ハル（2016）「フィナンシャルエンジニアリング〔第 9 版〕―デリバティブ取引とリスク管理の総体系」きんざい
[8]. 服部孝洋（2019）「イールドカーブ（金利の期間構造）の決定要因について―日本国債を中心とした学術論文のサーベイ―」『ファイナンス』令和元年 10 月号、41–52.
[9]. 服部孝洋（2020a）「ボラティリティ・スマイルとスキュー―日本国債市場における正規分布

から乖離した動きについて—」『ファイナンス』令和２年６月号、47–55.

[10]. 服部孝洋（2020b）「金利リスク入門—デュレーション・DV01（デルタ、BPV）を中心に—」『ファイナンス』令和２年 10 月号、54–65.

[11]. 藤井眞理子（2004）「国債管理政策におけるリスクの把握と定量化」『フィナンシャル・レビュー』第 70 号、103-122.

[12]. 三菱東京 UFJ 銀行円貨資金証券部（2012）『国債のすべて—その実像と最新 ALM によるリスクマネジメント』きんざい

[13]. Brigo, D. and Mercurio, F. (2006) *Interest Rate Models - Theory and Practice: With Smile, Inflation and Credit*. Springer.

[14]. Danmarks Nationalbank (2001) "Danish Government Borrowing and Debt"

[15]. Hayashi, F. (2000) *Econometrics*. Princeton: Princeton University Press.

[16]. Heath, D., Jarrow, R., and Morton, A. (1992) "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation" *Econometrica* 60 (1), 77–105.

[17]. Inui, K. and Kijima, M. (1998) "A Markovian framework in multi-factor Heath-Jarrow-Morton models" *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 33 (3), 423–440.

[18]. Ritchken, P. and Sankarasubramanian, L. (1995) "Volatility structures of forward rates and the dynamics of term structure" *Mathematical Finance* 5 (1), 55–72.

財務省財務総合政策研究所総務研究部
〒100－8940 千代田区霞が関３－１－１
TEL 03－3581－4111 （内線 5487, 5222）