

## 集群推定法とその進展<sup>\*1</sup>

鈴木 崇文<sup>\*2</sup>

### 要 約

本稿では、財政・公共経済学の分野を中心に近年応用例が増加している集群推定（Bunching Estimation）法について、その基本的な分析枠組みを説明するとともに、近年の手法の発展および批判について取り上げる。集群推定法は Saez（2010）を端緒とし、課税所得の弾力性を推定する手法として確立されたが、近年ではその応用例は他分野に広がっている。しかし、当該手法の利用方法について日本語での解説を行っている文献は限られており、日本において集群推定を利用した研究は比較的少ないのが現状である。加えて、近年、当該手法に関する分析の拡張や、推定における問題点に関する数多くの論文が出版されている。

そこで本稿では、特に課税所得の弾力性に関する文脈から、（1）基本的な分析手法について解説を行うとともに、（2）近年の手法の発展状況と、後続研究で指摘されてきた推定における問題点や課題について紹介する。

キーワード：集群推定, Bunching, 課税所得弾力性

JEL Classification：H00, C01, H24

## I. はじめに

限界純税率に対する課税所得の弾力性<sup>1)</sup>の推定は、財政・公共経済学分野における重要なトピックとなっている。課税所得の弾力性は、税制改革が経済主体に与える効果や、税制度の最適な設計に関する議論において、厚生分析を行う際に必要な十分統計量（sufficient statistic）となるため（Feldstein 1999）、現在に至るまで弾力性の推定に関する数多くの研究が行われてきた。現在、課税所得の弾力性を推定するアプ

ローチは主に2つの方法が存在する。1つ目の方法は、税制変更による異時点間の予算線の変動を利用するものである（税制変更アプローチ）。この方法では基本的にパネルデータを用いて、税制変更によって引き起こされる限界税率の変化が各個人の課税所得の変化に与える影響を分析することで、弾力性の値を推定する<sup>2)</sup>。

一方で、近年では予算線において生じている屈曲（kink）や断絶（notch）を利用した課税

\* 1 本論文の作成にあたり、林正義教授（東京大学）、児玉直美教授（明治学院大学）より多くのご示唆を頂いた。

\* 2 愛知淑徳大学ビジネス学部講師

1) 英語では、「elasticity of taxable income (ETI) with respect to the marginal net-of-tax rate」と表現される。

所得の弾力性の推定が数多く行われるようになってきた。予算線の屈曲や断絶では、経済主体のインセンティブに不連続性が生み出されるため、それに対して行動反応が生じ、不連続点に経済主体が集群する。2つ目のアプローチは、このインセンティブと集群との関係から、経済主体に関する課税所得の弾力性を推定する方法である。これが本論文で取り上げる集群推定 (bunching estimation) 法であり<sup>3)</sup>、初期の研究としては Saez (2010), Chetty et al. (2011), Kleven and Waseem (2013) などが存在する。集群推定の初期の研究では、主に課税に対する行動反応が推定されていたが、現在では医療、ファイナンス、環境など他の分野にも応用例が広がっている。実際、集群推定法を利用した論文数は近年増加傾向にあり、Currie, Kleven, and Zwiers (2020) によると、経済学雑誌における所謂「5大誌」および<sup>4)</sup> National Bureau of Economic Research (NBER) Working Paper に掲載された論文を対象にしたテキスト分析から、「bunching」を語句に含む論文数が増加していることが示されている (当該論文, p. 45 Figure 4 参照)。Saez (2010) が出版された2010年以降、論文数は5大誌で2倍程度、NBER Working Paper で4倍程度に増加しており、主要な研究手法の一つとして確立してきたことが窺える。

このように、財政・公共経済学をはじめとする分野において集群推定を活用した研究が多く積みあがってきたにもかかわらず、当該手法の

利用方法について日本語で解説を行っている文献は限られているのが現状である<sup>5)</sup>。また、日本において集群推定を利用した研究は、Ito and Sallee (2018), 市川ら (2021), Kawakubo et al. (2022) など、比較的少ないのが現状である<sup>6)</sup>。加えて、Saez (2010) をはじめとする初期の研究以降で提示されてきた、様々な分析の拡張や推定における問題点についてまとめられている文献は存在しないようである。そこで本稿では、近年集群推定を利用した研究が増加していることを踏まえ、特に課税所得の弾力性に関する文脈から、(1) 基本的な分析手法について解説を行うとともに、(2) 近年の手法の発展状況と、後続研究で指摘されてきた推定における問題点や課題について紹介する。

本稿の構成は以下である。Ⅱ節では集群推定について基本的な理論枠組みと推定方法について記述する。Ⅲ節では、既存研究の進展について紹介するとともに、推定における問題点や拡張点、および関連する議論について解説する。最後にⅣ節でまとめを行う。

2) 例えば、Gruber and Saez (2002), Kleven and Schultz (2014), Jakobsen and Søgaard (2022), Miyazaki and Ishida (2022) を参照。他にサーベイ論文としては、Saez, Slemrod, and Giertz (2012) が挙げられる。

3) bunching estimation を扱った既存の日本語文献では「集積」を用いている場合がみられるが、経済学において集積は agglomeration や clustering などの日本語訳としても利用されているため、本論文では林 (2020) に従い、訳語として「集群」を当てている。

4) ここでは、American Economic Review, Econometrica, Journal of Political Economy, Quarterly Journal of Economics, Review of Economic Studies の5雑誌を指している。

5) 日本語で解説が行われている書籍としては伊藤 (2017) が、論文では市川ら (2021) などが存在するが、集群推定について技術的な面を含めた全体的な解説を行っている文献は存在しないようである。

6) Ito and Sallee (2018) では日本の燃費規制に関する自動車重量の閾値に、市川ら (2021) や Kawakubo et al. (2022) は日本の消費税制度における免税閾値に着目した分析を行っている。また、集群推定を行っているわけではないが、例えば Onji (2009) は消費税の簡易課税に関する閾値、Yokoyama (2018) および横山・児玉 (2016) では所得税の配偶者控除に関する閾値における集群を実際のデータから指摘している。

## II. 集群推定とは

この節では、所得税に対する個人の課税所得の弾力性を推定することを念頭に、集群推定の基本的な枠組みについて、理論的および実証的側面から解説する。より詳細な議論については、Kleven（2016）を参照されたい<sup>7)</sup>。

### II-1. 理論モデル：屈曲のケース

まず初めに、予算線に屈曲（kink）が生じているケースについて解説する。ある個人が労働を行い、稼得所得で消費を行う状況を考える。この個人の税引後所得を  $c$ 、税引前所得を  $y$  とすると、両者の関係は税引前所得に対する課税額  $T(y)$  を用いて、 $c = y - T(y)$  と表せる。また、個人の効用を  $U(c, y; a)$  とする。 $a$  は個人の稼得能力に関する異質性を表すパラメータであり、分析者からは観測できない。パラメータ  $a$  は密度関数  $f(a)$  に従うとする。また、課税所得は滑らかな密度関数  $h_0(y)$  に従って分布しており、各個人が単一の限界税率  $\tau$  の比例税に直面していると仮定する（つまり課税額は、 $T(y) = \tau \cdot y$  となる<sup>8)</sup>）。

ここで、ある税引前所得水準  $y^*$  を閾値として、それを上回る所得に対しては限界税率が  $\tau$  から  $\tau + \Delta\tau$  に上昇する屈曲（kink）が導入されたとする（ $\Delta\tau > 0$ ）。つまり、税額は

$$T(y) = \tau \cdot y + \Delta\tau \cdot (y - y^*) \cdot 1\{y > y^*\}$$

のように表されることになる。ここで  $1\{\cdot\}$  は引数の条件を満たせば1を取る指示関数である。ある税引前所得  $y^*$  の閾値以下では、個人は限界税率  $\tau$  に直面するが、 $y^*$  を越えると限界税率（ $\tau + \Delta\tau$ ）に直面することになる。

図1パネル（a）には、 $y^*$  を上回る課税所得分について  $\Delta\tau$  の税率引き上げがなされた（屈

曲が生じた）場合（実線）と、屈曲が存在しない場合（点線）の2つの予算線が示されている。また、パネル（b）は2つの予算線の下での個人の所得分布として、実分布と反実仮想分布の2つが示されている。屈曲が存在しない場合においては、個人は効用を最大化するように傾き  $(1 - \tau)$  の予算線から所得額を選択する（すなわち、賃金率が一定であるとする労働供給量を選択する）ため、パネル（a）では、能力が  $a^*$  および  $a^* + \Delta a$  の個人は、それぞれ所得  $y^*$  および  $y^* + \Delta y$  を選択することになる。いま、 $y^*$  で屈曲が生じるとすると、従前から  $y^*$  以下を選択していたすべての個人は、増税の影響を受けないが、 $y^*$  を上回る課税所得を選択していた個人は影響を受けることになる。特に、当初  $y^* + \Delta y$  で予算線に接する無差別曲線を持っていた個人は、増税後は  $y^*$  に接する無差別曲線を持つことになり、限界集群者（marginal buncher）と呼ばれる。これは、当初  $y^* + \Delta y$  より下に位置する  $y^*$  までの間の全ての個人が、増税後は  $y^*$  の屈曲に接する無差別曲線を持つことになるからである。限界集群者は閾値に課税所得を引き下げる個人の中で、増税前に最大の課税所得を持つ個人である。

このような一定の所得水準以上に対する限界税率の上昇は、個人の所得分布に影響を与えることになり、増税による屈曲導入後の税引前所得分布は、 $h(y)$  に変化する。パネル（b）にはパネル（a）の各税スケジュールに対応する所得分布  $h(y)$  と  $h_0(y)$  が示されている。

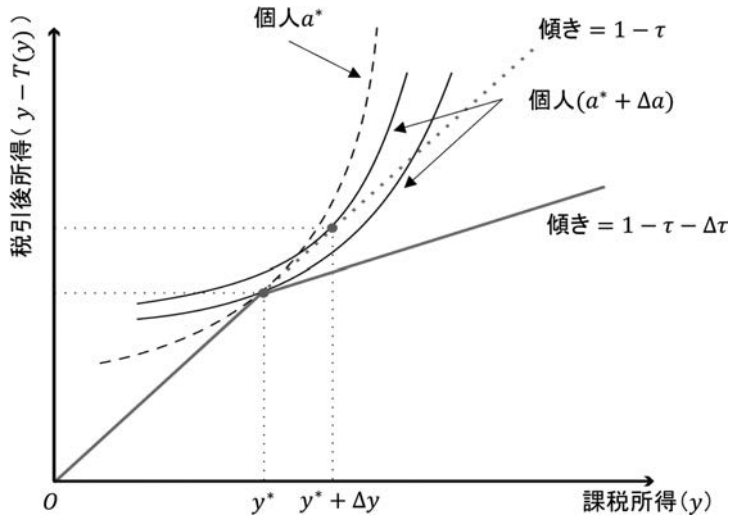
図からわかるように、閾値よりも所得水準が低い  $y < y^*$  の範囲については、 $h_0(y)$  と  $h(y)$  で分布の形状は同じである。限界集群者より上

7) 本節は Kleven（2016）に多くを負っている。当該論文では、集群推定に関する基本的な分析枠組みを解説するとともに、関連文献を包括的に解説している。

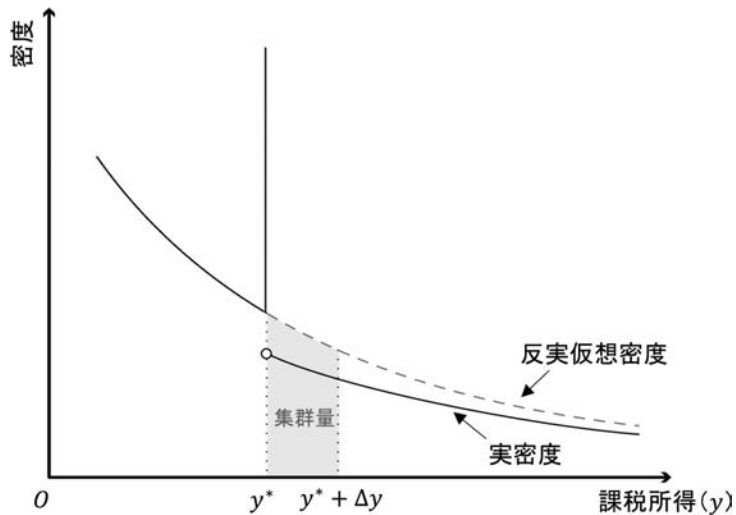
8) 本稿では、基本的に税制が線形もしくは区分線形課税スケジュールに従っている場合を扱う。

図1 屈曲のケース

(a) 予算線



(b) 課税所得密度分布



(注1) パネル (a) は横軸に課税所得、縦軸に税引後所得をとる個人の予算線である。また、個人  $a^*$  および  $(a^* + \Delta a)$  に関する無差別曲線も示されている。原点から伸びる傾き  $(1 - \tau)$  の点線は屈曲が存在しない場合の予算線を、原点から傾き  $(1 - \tau)$  で伸び、課税所得  $y^*$  で傾き  $(1 - \tau - \Delta\tau)$  に屈曲する実線は、屈曲が存在する場合の予算線を示している。また、限界集群者である個人  $(a^* + \Delta a)$  は、屈曲が存在しない場合には  $y^* + \Delta y$  を選択するが、屈曲が存在する場合には  $y^*$  を選択することになる。

(注2) パネル (b) はパネル (a) に対応する、屈曲が存在する場合としない場合における課税所得の密度分布を示している。実密度 (実線) は、屈曲が存在する場合の密度分布、反実仮想密度 (点線) は屈曲が存在しない場合の密度分布である。影の部分は、 $y^*$  に集群する閾値  $y^*$  から  $y^* + \Delta y$  の範囲の個人の量を表している。

(出所) 筆者作成

に位置する個人については、 $y^*$ を上回る課税所得に対する限界税率の上昇に対応して課税所得を減少させるため、屈曲より上の分布には凹みが生じることはない<sup>9)</sup>。つまり、 $y^*$ より上の密度分布が全体的に左シフトしている。また個人の所得分布が増税前後で一定であるとする、 $y^*$ で生じている集団の大きさは、増税前の $(y^*, \infty)$ の密度分布が縮小することによって穴埋めされていることになる。

限界純税率に対する課税所得の弾力性 $\eta$ が屈曲 $y^*$ の周辺の個人に関して一定であると仮定すると、弾力性 $\eta$ は

$$\eta = \frac{\Delta y/y^*}{\Delta \tau/(1-\tau)} \quad (1)$$

と表すことができる。ここでは、閾値における個人の非常に局所的な反応を捉えているため、所得効果が無視できると考えている（つまり、 $\Delta y$ が微小）。しかし、屈曲が大きくなり行動反応が生じる課税所得の範囲 $(y^*, y^* + \Delta y)$ が拡大すると、(1)式で捉えられる弾力性には、所得効果が含まれることになる点に注意が必要である。後述するように、この問題について基本的に既存研究では、効用関数を所得効果が存在しない形状に仮定することで回避している。

税制度に関する情報から、閾値 $y^*$ や、税率 $\tau$ および $\Delta \tau$ は既知であるため、弾力性 $\eta$ を推定するために必要な情報は $\Delta y$ のみである。増税によって閾値 $y^*$ に生じた過剰集群量（excess bunching amount）を $B$ とすると、

$$B = \int_{y^*}^{y^* + \Delta y} h_0(y) dy = h_0(\bar{y}) \Delta y \approx h_0(y^*) \Delta y \quad (2)$$

と書ける。ここで、 $h_0(y)$ は増税が行われていなかった場合（すべての区間で税率が $\tau$ であった場合）の課税所得に関する密度関数である。積分の平均値の定理から、ある $\bar{y} \in (y^*, y^* + \Delta y)$ について2つ目の等号が成り立つ。 $\Delta y$ が十分に小さければ、密度 $h_0(\bar{y})$ を $h_0(y^*)$

で近似することができるため、最終的に過剰集群量 $B$ は近似式として $h_0(y^*) \Delta y$ のように表現できる。この(2)式から $\Delta y$ を推定するが、実証分析におけるこれ以降の具体的な手続きについては、次節で説明する。

Saez (2010)をはじめとする集群推定の先行研究では、効用関数（目的関数）を以下のような等弾力的（iso-elastic）な所得効果が存在しない関数に特定化することが一般的である。

$$U(c, y; a) = c - \frac{a}{1+1/\eta} \left(\frac{y}{a}\right)^{1+1/\eta} \\ = y - T(y) - \frac{a}{1+1/\eta} \left(\frac{y}{a}\right)^{1+1/\eta} \quad (3)$$

ここで $a > 0$ 、 $\eta > 0$ である。(3)式の下で、限界税率が引き上げられる前の税額 $T(y) = \tau \cdot y$ における効用最大化問題に関する一階条件から、個人の選択する課税所得 $y$ は $y = a \cdot (1 - \tau)^\eta$ となる<sup>10)</sup>。つまり限界集群者（能力 $a^* + \Delta a$ ）に関しては、税率引き上げが行われていなかった場合の予算線上に接する場合の一階条件 $y^* + \Delta y = (a^* + \Delta a)(1 - \tau)^\eta$ 、および、税率引き上げが行われており予算線に屈曲が生じている場合に、屈曲点に接する場合の一階条件 $y^* = (a^* + \Delta a)(1 - \tau - \Delta \tau)^\eta$ の2つの条件が満たされることになる。この2つの条件から、

$$1 + \frac{\Delta y}{y^*} = \left( \frac{1}{1 - \frac{\Delta \tau}{1 - \tau}} \right)^\eta$$

となるので、両辺対数を取ると、

$$\ln \left( 1 + \frac{\Delta y}{y^*} \right) = -\eta \cdot \ln \left( 1 - \frac{\Delta \tau}{1 - \tau} \right)$$

となる。したがって弾力性は、

$$\eta = - \frac{\ln(1 + \Delta y/y^*)}{\ln(1 - \Delta \tau/(1 - \tau))} \quad (4)$$

と表せる。この式においても、 $y^*$ 、 $\tau$ および $\Delta \tau$ は既知であるため、データから $\Delta y$ を推定する

9) この点は後述する断絶（notch）のケースとは異なる。

10)  $\frac{\partial \ln y}{\partial \ln(1-\tau)} = \eta$ より、すべての個人について限界純税率に対する課税所得の弾力性は $\eta$ となっている。

また、選択される課税所得は $a$ および $\eta$ の増加関数、 $\tau$ の減少関数となっている。

ことで弾力性が推定できることになる。

## II-2. 理論モデル：断絶のケース

次に、予算線に断絶 (notch) が生じているケースについて解説する。ある課税所得水準で断絶が生じている場合には、当該水準で限界税率ではなく平均税率が不連続に変化することになるが、基本的な分析枠組みは屈曲のケースと同じである。個人の効用最大化問題の設定は先ほどと同様で、能力  $a$  は密度関数  $f(a)$  に従っており、断絶が存在しなかった場合の課税所得の分布についても  $h_0(y)$  で与えられる。

ここでは断絶が生じる税のスケジュールとして、以下のような税関数を考える。

$$T(y) = \tau \cdot y + \Delta\tau \cdot y \cdot 1_{\{y > y^*\}}$$

つまり、課税所得  $y$  が閾値  $y^*$  以下では平均税率  $\tau$ 、閾値を超えると平均税率が  $\tau + \Delta\tau$  に不連続に上昇することになる。ここで考えている断絶は、閾値では平均税率と限界税率の両方が不連続に変化しているが、閾値で限界税率は変化せず、平均税率のみが変化するタイプの断絶であっても分析の方法は類似したものとなる。

図2パネル (a) では、すべての課税所得  $y$  について税率  $\tau$  が適用される場合の予算線 (傾き  $1 - \tau$  の直線) と、閾値  $y^*$  以下では税率  $\tau$ 、閾値  $y^*$  を上回る場合には税率  $\tau + \Delta\tau$  の課税が行われる (つまり断絶が生じている) 場合の個人の予算線 (実線) とが示されている。また、パネル (b) はそれらに対応する所得分布を示している。

断絶が生じていない場合には、パネル (a) に示されているように、個人  $a^*$  や個人  $a^* + \Delta a$  の無差別曲線は点線に接する形でそれぞれ  $y^*$  および  $y^* + \Delta y$  が選択されている。しかし、予算線に断絶が生じると、 $(y^*, y^* + \Delta y]$  の間の所得を選択していた全ての個人は閾値に集群することになる。区間の上限である  $y^* + \Delta y$  に増税前から位置していた個人は、この集群におけ

る限界集群者であり、断絶が存在する税スケジュールにおいて、閾値  $y^*$  の選択と図の点  $y^l$  の選択とが無差別な状態になっている。当該税制変更に対する個人の行動反応によって生じる所得分布の変化がパネル (b) に示されているが、閾値の直上では密度分布に穴が空いており (凹みが生じており)、 $y^*$  と  $y^l$  の間を選択する個人は存在していないことが分かる。また、税制変更前に  $y^* + \Delta y$  を上回る課税所得を選択していた個人は、増税によって選択する所得が低下するものの、閾値  $y^*$  を選択するまでに所得を引き下げたわけではない。

Kleven (2016) によると、断絶の場合には他の選択に厳密に支配される所得範囲 (ここでは図2の  $(y^*, \Delta y^D)$  の範囲) が生じることが、屈曲と断絶の大きな違いであると指摘されている。当該範囲では、どのような効用関数を想定したとしても、集群が生じる閾値まで所得を引き下げることによって消費と余暇の両者を増加させることが可能である。図2では弾力性が全ての個人で同一のケースを示しているため、屈曲が存在する場合には  $(y^*, y^l)$  の範囲に個人が存在しない。しかし、弾力性に異質性が存在する場合には、個人が存在しない領域は  $(y^*, y^D)$  に狭まり得る<sup>11)</sup>。L字型の Leontief 選好の場合には、集群が生じる所得の領域はこの支配領域に丁度対応することになる。

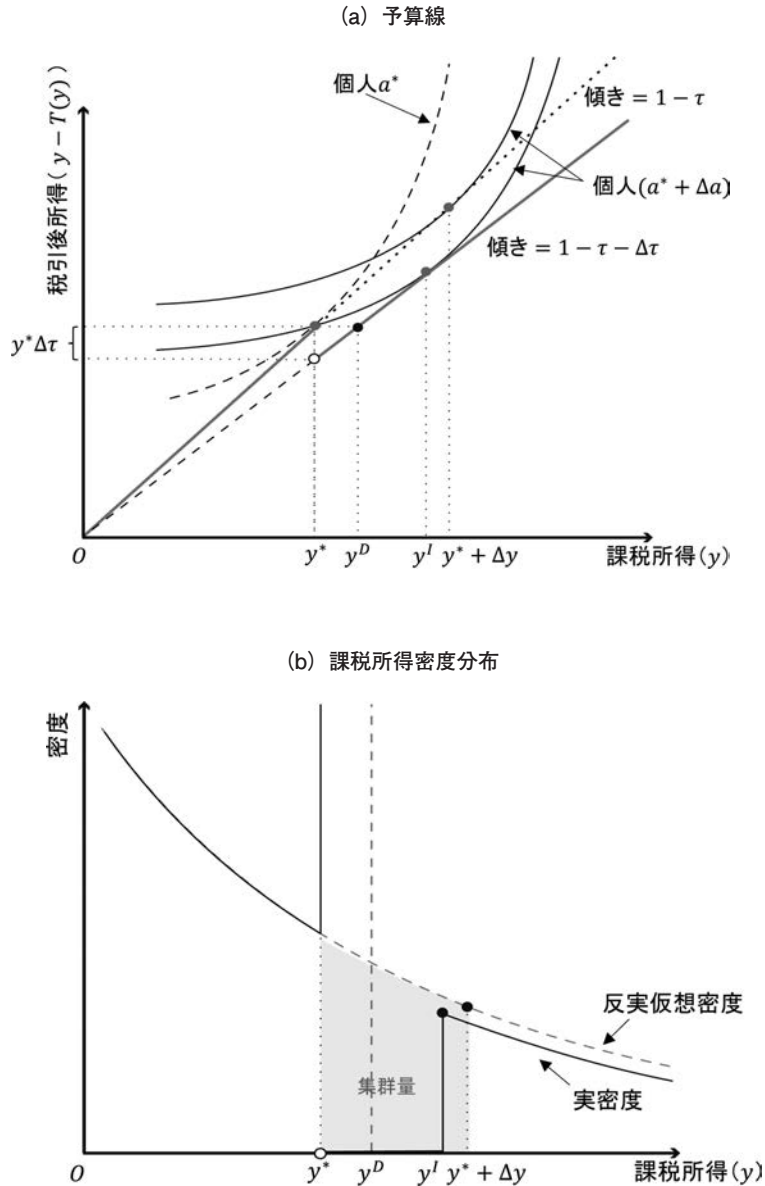
断絶のケースにおいて課税所得の弾力性  $\eta$  を求めるには、限界集群者に関して次の条件を用いることになる。ここでも、屈曲のケースで考察した等弾力的な効用関数 (3) 式を想定する。限界集群者 (能力  $a^* + \Delta a$ ) は、閾値  $y^*$  の選択と図の点  $y^l$  の選択とが無差別となっているから、前者での効用は、

$$U^* = (1 - \tau)y^* - \frac{a^* + \Delta a}{1 + 1/\eta} \left( \frac{y^*}{a^* + \Delta a} \right)^{1 + 1/\eta}$$

と書ける。一方、後者での効用は以下のように書ける。

11) 個人の弾力性 (選好) に異質性が存在するケースについての詳細な議論は Kleven and Waseem (2013) および Kleven (2016) を参照されたい。

図2 断絶のケース



(注1) パネル (a) は横軸に課税所得、縦軸に税引後所得をとる個人の予算線である。また、個人  $a^*$  および  $(a^* + \Delta a)$  に関する無差別曲線も示されている。原点から伸びる傾き  $(1 - \tau)$  の点線は断絶が存在しない場合の予算線を、原点から傾き  $(1 - \tau)$  で伸び、課税所得  $y^*$  で不連続に傾き  $(1 - \tau - \Delta\tau)$  の実線に移動するものは、断絶が存在する場合の予算線を示している。また、限界集群者である個人  $(a^* + \Delta a)$  は、断絶が存在しない場合には  $y^* + \Delta y$  を選択するが、存在する場合には  $y^*$  と  $y^I$  が無差別となる。加えて、 $y^*$  から  $y^* + y^D$  の範囲は、弾力性に異質性が存在する場合であっても他の範囲の課税所得に厳密に支配される選択領域となっている。

(注2) パネル (b) はパネル (a) に対応する、断絶が存在する場合としない場合における課税所得の密度分布を示している。実密度（実線）が断絶が存在する場合の密度分布、反実仮想密度（点線）が存在しない場合の密度分布である。影の部分、 $y^*$  に集群する閾値  $y^*$  から  $y^* + \Delta y$  の範囲の個人の量を表している。

(出所) 筆者作成

$$U^I = (1 - \tau - \Delta\tau)y^I - \frac{a^* + \Delta a}{1 + 1/\eta} \left( \frac{y^I}{a^* + \Delta a} \right)^{1+1/\eta}$$

$U^I$  は、一階条件  $y^I = (a^* + \Delta a)(1 - \tau - \Delta\tau)^\eta$  を用いることで、

$$U^I = \left( \frac{1}{1 + \eta} \right) (a^* + \Delta a) (1 - \tau - \Delta\tau)^{1+\eta}$$

と表現できる。両者の効用が無差別である条件  $U^* = U^I$  と、増税前の税スケジュールの下での限界集群者の一階条件である  $y^* + \Delta y = (a^* + \Delta a)(1 - \tau)^\eta$  を用いると以下を得る。

$$\frac{1}{1 + \Delta y/y^*} - \frac{1}{1 + 1/\eta} \left( \frac{1}{1 + \Delta y/y^*} \right)^{1+1/\eta} - \frac{1}{1 + \eta} \left( \frac{1 - \tau - \Delta\tau}{1 - \tau} \right)^{1+\eta} = 0 \quad (5)$$

(5) 式は、屈曲のケースにおける (4) 式に対応しており、 $y^*$ 、 $\tau$  および  $\Delta\tau$  は既知であるため、データから  $\Delta y$  を推定することで弾力性  $\eta$  が推定できることになる。

### II-3. 実証分析の手順

II-1 で説明したように、弾力性を求めるために必要となる  $\Delta y$  は、増税前の屈曲や断絶が存在していなかった場合の密度分布  $h_0(y)$  の推定値に依存している。本節では、Chetty et al. (2011) や Kleven and Waseem (2013) に基づいてこの密度分布の推定方法を紹介する。密度分布を推定する基本的な方針は、閾値  $y^*$  付近の範囲のデータを除外したうえで、観測されている所得分布に多項式を当てはめ、閾値付近の分布を外挿することである。具体的には、課税所得に関するヒストグラムを作成し、以下の回帰式を用いて反実仮想分布  $h_0(y)$  を推定する。

$$c_j = \sum_{i=0}^p \beta_i (y_j)^i + \sum_{i=y_L}^{y_U} \gamma_i \cdot 1\{y_j = i\} + \epsilon_j \quad (6)$$

ここで  $c_j$  はビン (区間)  $j$  における人数 (度数)、 $y_j$  はビン  $j$  における課税所得額の中央値、 $\epsilon_j$  は誤差項である。また、 $[y_L, y_U]$  は閾値近

傍の除外する所得の範囲、 $p$  は多項式の次数を表している<sup>12)</sup>。範囲  $[y_L, y_U]$  の選択に関して、屈曲での集群を推定する場合には、除外範囲は過剰集群が生じている領域を選択する必要がある。また断絶の場合は、分布において集群反応の影響を受ける全ての領域を除外する必要がある。この除外範囲の選択に関する詳細な手続きについては後述する。

密度の反実仮想分布は、(6) 式から除外範囲の項 ( $\sum_{i=y_L}^{y_U} \gamma_i \cdot 1\{y_j = i\}$ ) を除いた予測値  $\hat{c}_j = \sum_{i=0}^p \hat{\beta}_i (y_j)^i$  として得られる。また、過剰集群量  $B$  は除外範囲である  $[y_L, y_U]$  における実際の観測値と反実仮想分布から得られた予測値との差  $\hat{B} = \sum_{i=y_L}^{y_U} (c_i - \hat{c}_i)$  として推定できる。

まず屈曲の場合の推定方法について説明する。(2) 式に示されたように、 $\Delta y$  が十分小さければ、過剰集群量は  $B = h_0(y^*)\Delta y$  と近似式で表すことができた。理論的には  $h_0(y^*)$  は閾値  $y^*$  での密度を表しているが、実証的には幅  $W$  のビンにおける密度に対応することになるため、以下のように書ける。

$$B \approx \frac{h_0^W(y^*)\Delta y}{W} \quad (7)$$

ここで、 $h_0^W(y^*)$  は幅  $W$  のビンを持つ密度分布を表している。この (7) 式を用いると、弾力性は

$$\eta \approx \frac{\frac{B}{h_0^W(y^*)}}{\frac{\Delta\tau}{1-\tau} \cdot \frac{y^*}{W}}$$

と表すことができる。したがって、過剰集群量を閾値における反実仮想密度分布で基準化した相対過剰集群量 (relative excess bunching amount)  $b \equiv B/h_0^W(y^*)$  をデータから推定すればよい。推定には、上述の過剰集群量の推定値  $\hat{B}$  を利用することが考えられるが、この推定値は過大評価される傾向にあることが指摘されている (Chetty et al. 2011)。この理由は、屈曲が

12) 既存研究では、Chetty et al. (2011) に従い  $p=7$  を採用する場合が多い。また頑健性分析では、次数を変更しても結果に大きな変化がないかを確認する。



生じると、元々閾値より上方を選択していた個人は限界税率の上昇に反応して所得を引き下げる点を考慮していないからである。推定に利用する閾値上方の実際の密度は、屈曲がない場合に観察される反実仮想密度に対して過少になっている可能性が高いにも関わらず、反実仮想分布の推定では、この過少な密度を利用しているためにバイアスが生じる。Chetty et al. (2011)はこの問題点に対応する方法として次の回帰を行い、 $\hat{c}_j = \sum_{i=0}^p \hat{\beta}_i (y_j)^i$  を得る方法を提案している<sup>13)</sup>。当該方法では、推定式の左辺にも推定すべきパラメータ $\beta_i$ が含まれるため、 $\hat{B}$ を求めた $\beta_i$ の推定値と、それを利用して求めた右辺の $\beta_i$ の推定値とが等しくなるまで計算を繰り返す。

$$c_j \cdot \left( 1 + 1 \{j \geq y_U\} \cdot \frac{\hat{B}}{\sum_{i=y_U}^{\infty} c_j} \right) = \sum_{i=0}^p \beta_i (y_j)^i + \sum_{i=y_L}^{y_U} \gamma_i \cdot 1 \{y_j = i\} + \epsilon_j$$

得られた $\hat{c}_j$ を用いて、新しい過剰集群量 $\tilde{B} = \sum_{i=y_U}^{y_U} (c_i - \hat{c}_i)$ を構成する。相対過剰集群量の推定量は

$$\hat{b} = \frac{\tilde{B}}{(\sum_{i=y_U}^{y_U} \hat{c}_i) / N}$$

と書ける。 $N$ は除外範囲におけるビンの数である。 $\hat{b}$ の標準誤差はブートストラップ法によって求めることが一般的である。まず、回帰の残差標本からランダムに復元抽出を行い、新たな $c_j$ を生成する。このサンプルを用いて回帰を行い、 $\hat{c}_j$ から相対過剰集群量 $\hat{b}$ を計算する。これを一定回数繰り返して得られた $\hat{b}$ の分布について標準偏差を計算し、 $\hat{b}$ の標準誤差と定義する。また、この $\hat{b}$ を用いて弾力性の推定値 $\hat{\epsilon}$ および $\hat{\epsilon}$ の標準誤差についてもデルタ法(delta method)により求めることができる。

次に断絶の場合の推定方法について説明する。

この場合も同様に(6)式を推定するが、過少集群の上限となる $y_U$ を実際の密度の情報を用いて決定する点が大きく異なる。まず、 $y_L$ から閾値 $y^*$ の範囲における過剰集群量 $\hat{b}_E(y^*)$ を計算し、それが閾値より上に生じている過少集群量 $\hat{b}_M(y^*)$ と等しくなるように上限値 $y_U$ を決定する。ここで $\hat{b}_E(y^*)$ および $\hat{b}_M(y^*)$ は以下のように定義できる。

$$\hat{b}_E(y^*) = \sum_{j=y_L}^{y^*} (c_j - \hat{c}_j)$$

$$\hat{b}_M(y^*) = \sum_{j=y^*}^{y_U} (\hat{c}_j - c_j)$$

具体的な手続きとしては、閾値に近い値に $y_U$ を設定し、 $\hat{b}_E(y^*) = \hat{b}_M(y^*)$ となるように $y_U$ を引き上げる形で適切な値の探索を行う。断絶のケースがこのような形で $y_U$ を決定する理由は、屈曲とは異なり、閾値の直上に個人が選択しない所得範囲が生じる傾向にあるため、視覚的には集群範囲が明確でないからである(Kleven and Waseem 2013)。以上の方法で除外範囲を決定したのちの推定方法は、屈曲の場合と同様である。

以下では、推定における注意点について述べる。1つ目は、除外範囲 $[y_L, y_U]$ の選択に関するものである。基本的には閾値周りの所得分布の形状を目視で確認することによって、範囲を決定することが一般的である。屈曲のケースでは $y_L$ および $y_U$ を目視によって選択する。断絶のケースでは、 $y_L$ を目視によって定め、上述の手続きによって閾値より下方に存在する過剰集群量と上方に存在する過少集群量とが等しくなるように $y_U$ を決定する。また既存研究では、 $y_L$ および $y_U$ の位置を動かしても結果が大きく変動しないことを頑健性確認として行っている。この除外範囲の決定については、より体系的に行う手法が提案されているため、次節で紹介する。

13) ただ、Kleven (2016)では、以下の2つの理由からこのバイアスの大きさは多くの場合無視できる水準であると述べている。この理由の1つ目は、屈曲に対する個人の反応は非常に局所的であるため、分布の変化も小さな数値となりがちである点、2つ目は、密度分布の傾きが十分に急でない限り、閾値上方の密度が反実仮想密度に対して一定程度の大きさとなるため、屈曲の存在により密度が過少となる影響は少ないと考えられる点である。

2つ目は、分布を描いた際にキリの良い数値に集群が起きる現象（丸め値集群, round number bunching）への対処である。こうした現象は多くの既存研究でも報告されており、金銭的なインセンティブとは異なる要因（例えば、キリの良い数字が個人にとって参照点として機能している）によって集群が生じている可能性が指摘されている。税に関しての屈曲や断絶が生じる閾値は、制度としてキリの良い数字に設定されることが多いため、この丸め値集群を無視すると、弾力性を過大推定してしまう可能性がある。つまり、弾力性を求めるためには、こうした税率以外の非金銭的な要因による集群の効果を除外する必要がある。Kleven and Waseem (2013) などが採用している一般的な対処法は、キリの良い数字について1を取るダミー変数を回帰式に追加することで、影響を除外する方法である。具体的には、(6)式に  $\sum_{r \in \mathbb{R}} \lambda_r \cdot 1 \left\{ \frac{y_i}{r} \in \mathbb{N} \right\}$  を挿入する。ここで、 $\mathbb{R}$

は例えば100万円や500万円といったキリの良い数字の集合であり、 $\mathbb{N}$ は自然数、 $\lambda_r$ はパラメータである。つまり、キリの良い数字で割り切れるような値を課税所得が取る場合に、そうした数値に生じる集群を統制するということである。

このように、キリの良い数字に関するダミー変数を統制することで丸め値集群に対処する方法があるが、データのノイズが大きい場合にはうまくいかない場合もある。そこで、例えばHe et al. (2021)では、通常丸め値集群をダミー変数で統制する分析に加えて、キリの良い数字における観測値を除外したサンプルを用いて分析を行っている。ただこの方法では、税率に反応して所得を正確に閾値（ここではキリの良い数字と想定）に調整している個人をサンプルから除外してしまうことになるため、弾力性を過少推定してしまう可能性があることに注意が必要である<sup>14)</sup>。

### III. 既存研究の進展

上述のように、予算線の屈曲や断絶を利用した基本的な分析枠組みについては、Saez (2010), Chetty et al. (2011) および Kleven and Waseem (2013) で提示された。しかしその後も、経済主体の直面する最適化摩擦に関する議論、主に関心となるパラメータ（例えば、本稿では課税所得の弾力性）の識別可能性に関する議論や、集群推定法における技術的な側面での改善方法の提案、他の推定方法との比較などが行われてきた。本節では、以上の集群推定法に関連した既存研究の進展について紹介する。

#### III-1. 最適化摩擦の問題

集群推定における複数の既存研究において、経済主体の直面する最適化摩擦によって税の屈曲や断絶に対する集群反応が妨げられていることが指摘されてきた（e.g., Chetty et al. 2011; Chetty 2012; Chetty, Friedman, and Saez 2013; Kleven and Waseem 2013; Aghion et al. 2017; Tazhitdinova 2020）。これは、(1) 屈曲や断絶がより大きい際に集群が大きくなる傾向（e.g., Chetty et al. 2011）や、(2) 制度がより長期的に安定しているときに集群が大きくなる傾向（e.g., Saez 2010）、また、(3) 屈曲が消滅しても閾値における集群がすぐには消滅し

14) 他に考えられる方法として、データが得られる場合の条件付きではあるが、屈曲や断絶が生じる前の分布やこうした税制に直面していない対照群の分布を反実仮想分布として利用する方法が考えられる。丸め値集群の対処として利用されているわけではないが Devereux et al. (2014) および Gelber et al. (2020) の分析はその一例である。

ない傾向（e.g., Gelber et al. 2020）が観察されてきたためである。1つ目については、より屈曲や断絶が大きいほど経済主体が調整を行うためのコストを克服するインセンティブが大きいために、集団が大きくなると解釈される。また、2つ目および3つ目では、短期的には調整を妨げる摩擦が存在するが、長期的にはその摩擦が解消されるため、長期的な反応は一般的に測定される短期的な反応よりも大きくなると考えられる（Saez 2010; Saez, Slemrod, and Giertz 2012）。

このように、最適化摩擦の存在は、集団推定の文脈において比較的当初から議論がなされてきたが、特に重要な点は、摩擦の存在が課税所得の弾力性の推定値に影響を及ぼす点である。当然ながら、最適化摩擦は過剰集群量の規模に影響を与えるため、厚生分析に重要となる長期的な構造パラメータである弾力性と、短期的な反応から推定される弾力性の推定値の間に乖離を生み出してしまふ（Chetty 2012）。最適化摩擦の要因については、行動バイアス、情報の非対称性、金銭的・時間的な調整費用、標準的でない選好体系によるものなど様々考えられている。

課税所得の弾力性を推定するという観点からは、いかにこの摩擦を除去して構造パラメータである弾力性を推定するかが重要となる。実際、Chetty (2012) では、たとえ最適化摩擦が小さい場合でも、識別できる構造的な弾力性の境界（bound）は多くの場合広がってしまうと指摘されている。また同時に、最適化摩擦の規模を定量化することも、厚生分析を実施する上では必要になる場合がある（e.g., Chetty 2009; Chetty, Looney, and Kroft 2009）。

集団推定の初期の文脈において最適化摩擦の議論を行っている Chetty et al. (2011) では、デンマークの税務データを用いて最適化摩擦の存在を考慮した分析を行っている。彼らは、企業が労働時間制約のある求人を出し、賃金労働者が求職費用を支払って仕事を探索するという、最適化に対する費用を組み込んだモデルを提示し、データから観察される集団は以下のように

説明できるとしている。すなわち、(1) 屈曲が大きいほど（限界税率の変化が大きいほど）労働者は求職コストを克服しがちになるため、屈曲に対して課税所得の調整を行う労働者が増加し、推定される課税所得の弾力性が大きくなること、(2) より多くの労働者が直面する屈曲では、企業や組合が労働者の総体的な意向に合わせて賃金・時間パッケージを調整するために、より大きな集団を生じさせる（つまりより大きな弾力性が観察される）ことである。

その後の文献では、構造的な弾力性を推定するために主に2つのアプローチが考えられている。1つ目は、Chetty (2012) や Kleven and Waseem (2013) による構造的な弾力性パラメータの境界値を推定するアプローチである。このアプローチでは摩擦の大きさは識別されない。一方、2つ目は、構造的な弾力性および最適化摩擦とは独立した屈曲・断絶のばらつきや、制度変更などによる変動を利用するアプローチである（e.g., Gelber et al. 2020; Zaresani 2020; He et al. 2021）。この方法では、1つ目のアプローチとは異なり、最適化摩擦の大きさについてよりパラメトリックな特定化を行い、弾力性ととも推定する点に特徴がある。

まず前者のアプローチに属する代表的な研究である、Chetty (2012) および Kleven and Waseem (2013) について紹介する。Chetty (2012) では、動学的なライフサイクルモデルを想定し、個人は労働時間の調整に対する生涯の厚生減少率に許容できる一定の上限がある中で意思決定を行う。詳細は割愛するが、Chettyはこのモデルに基づいて構造的な弾力性の上限  $\epsilon_U$  および下限  $\epsilon_L$  を、観測された弾力性値  $\hat{\eta}$ 、識別に用いる税率変更の大きさ  $\Delta \log(1-\tau)$ 、および厚生減少率に関するパラメータ  $\delta$  の関数として以下のように近似できることを示している。

$$\epsilon_U = \hat{\eta} + \frac{4\delta}{(\Delta \log(1-\tau))^2} (1-\rho)$$

$$\epsilon_L = \hat{\eta} + \frac{4\delta}{(\Delta \log(1-\tau))^2} (1+\rho)$$

ここで、 $\rho = \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\hat{\eta}}{\delta} (\Delta \log(1-\tau))^2\right)^{1/2}$  である。

$\delta$  は特定の値を代入する必要があるが、Chetty (2012) は多くの場合  $\delta = 1\%$  が妥当な値であるとしている。

次に、Kleven and Waseem (2013) では、断絶が存在する税スケジュールにおいて、構造的な弾力性の下限と上限を推定する方法を提示している<sup>15)</sup>。まず、下限の推定方法については以下のように行う。個人の所得選択において他の所得水準に対して厳密に支配される領域を  $[y^*, y_D]$  とする。また、当該領域で課税所得を選択する個人の割合  $r$  は、

$$r \equiv \frac{\int_{y^*}^{y^*+\Delta y_D} h(y) dy}{\int_{y^*}^{y^*+\Delta y_D} h_0(y) dy}$$

と定義できる。ここで、 $h(\cdot)$  は実際に観測される課税所得の密度分布である。通常の弾力性推定で用いた過剰集群量  $B$  の代わりに、 $B/(1-r)$  を用いることで構造的な弾力性の下限値が推定される。その理由は以下のように説明できる。断絶が存在しない場合に個人が選択していた所得と閾値との距離が近いほど、断絶が存在する場合に摩擦を克服するインセンティブが強くなるため、個人は閾値に所得を調節する。逆に言えば、閾値から離れるほど調節を行わない個人の割合が高まることになる。ここでの  $r$  は、厳密に支配される領域のみを用いて閾値への調節を行わない個人の割合を計算しているため、 $y_D$  よりも上の領域で調節を行わない個人の割合を考慮していない。そのため、当該割合は過小に推定されていることになり、摩擦の大きさを過小評価していることになる。その結果、閾値直上の凹み(穴)はより大きく評価されるため(つまり閾値直上での集群範囲は狭くなる)、構造的な弾力性はより小さく評価されることになり、下限値が与えられることになる。

次に、弾力性の上限値を求める方法であるが、

実際に観測される所得分布と反実仮想分布とが収斂する点の所得から閾値まで調整するような個人の反応を  $\Delta y$  として決定できる。閾値への調節を行う個人のうち、断絶が存在しない場合に最も高い所得を持つ個人は弾力性が最も高いと考えられるからである。

次に、後者のアプローチに属する代表的な研究である、Gelber et al. (2020) について紹介する。Gelber et al. (2020) は、この課税所得の弾力性と最適化摩擦を同時に推定するための枠組みを初めて提示した論文である。彼らは、米国における社会保障制度 (Social Security Annual Earnings Test) の政策変更による屈曲上方の限界税率の減少を利用して、定年を迎える年代でかつ比較的低賃金な労働者を対象にした分析を行っている。具体的には、政策変更前後の屈曲間で弾力性および最適化摩擦の規模が等しいと仮定し、各時点における屈曲での集群を用いることで、2つの未知の値である弾力性および最適化摩擦の規模を推定している。以下ではその手続きについて説明する。

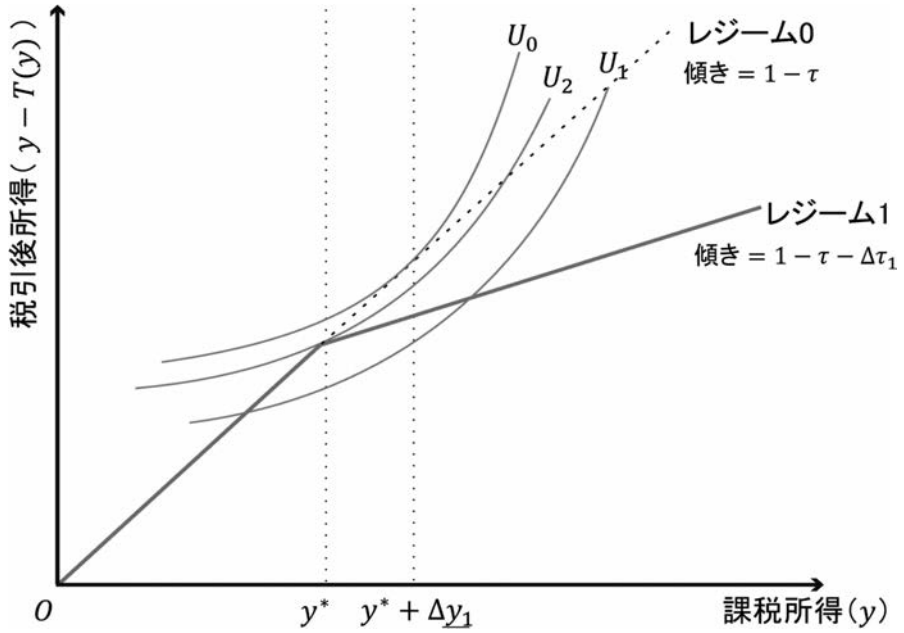
基本的な設定はII-1節での説明と同様であるが、所得の調整が行われる際の個人の効用関数は  $U(c, y; a) - \phi$  の形式で、効用に固定費用として最適化摩擦  $\phi$  が生じると仮定する。また、個人の課税所得の弾力性は  $\eta$  とし、 $\phi$  および  $\eta$  は時間を通じて一定であるとする。ここで、ある税引前所得水準  $y^*$  を閾値として、それ以上の所得に対しては限界税率が  $\tau$  から  $\tau + \Delta\tau$  に上昇する屈曲が導入されていたとする(ここで  $\Delta\tau > 0$ )。また、後の議論を明確にするために、この場合の税制をレジーム1、屈曲が存在しない場合の税制をレジーム0と呼ぶ。図3パネル(a)では、レジーム0および1の予算線が示されている。

もし最適化摩擦  $\phi$  が存在しなければ、II-1節の議論から、レジーム0において  $y \in (y^*, y^* + \Delta y_1]$  を選択していた個人は、閾値  $y^*$  に所得を調整する。しかし、最適化摩擦が存在する場合

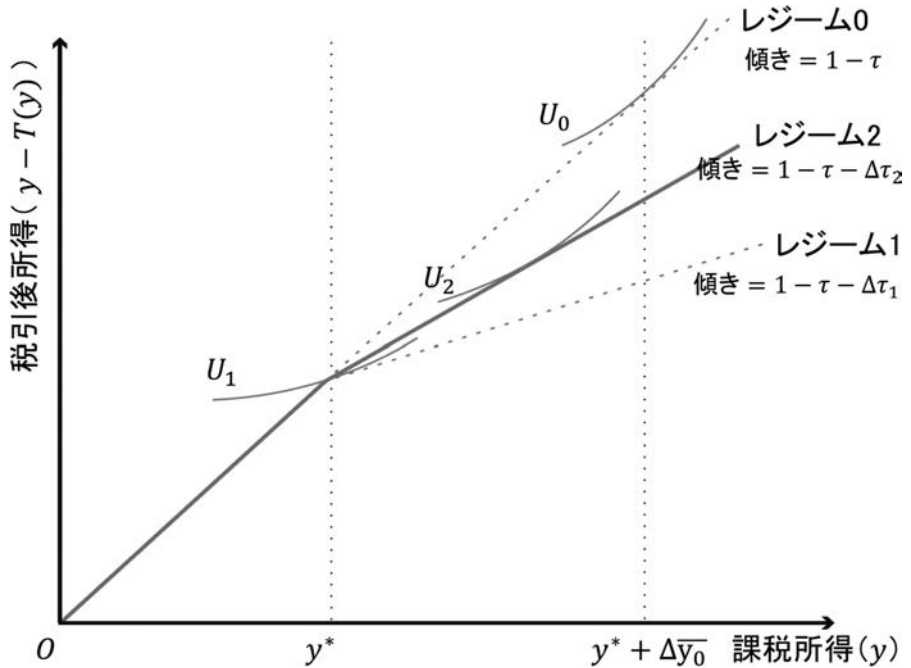
15) 近年の応用例としては、イギリスの個人所得税における断絶を対象とした Adam et al. (2021)、フィンランドの付加価値税における免税点での断絶を対象とした Harju et al. (2019)、同様に日本の消費税制における免税点での断絶を扱った Kawakubo et al. (2022) などが存在する。

図3 屈曲のケース：最適化摩擦が存在する場合

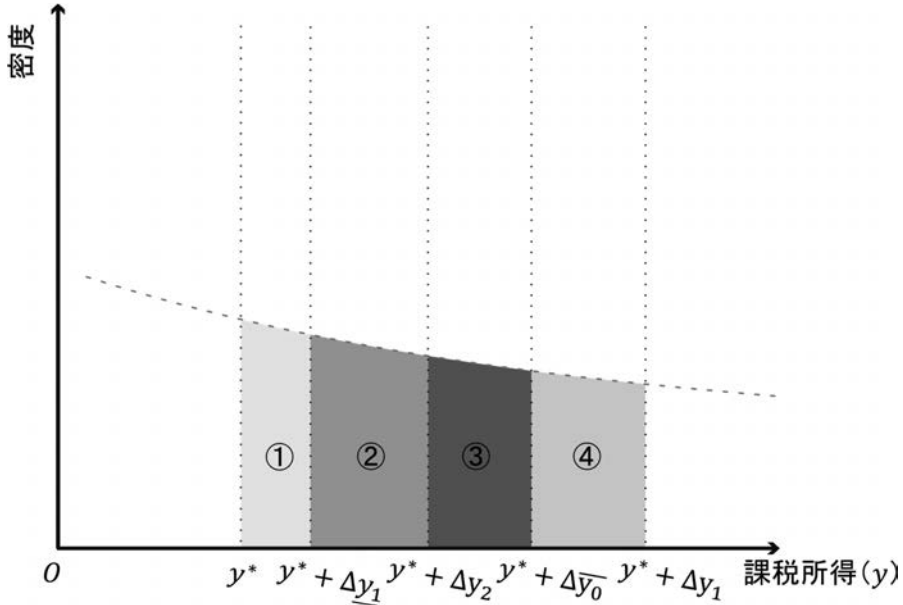
(a) 予算線：レジーム0からレジーム1への変化



(b) 予算線：レジーム1からレジーム2への変化



(c) 課税所得密度分布



(注1) パネル (a) および (b) は横軸に課税所得、縦軸に税引後所得をとる個人の予算線である。パネル (a) はレジーム 0 からレジーム 1 への予算線の変化および、変化に対する個人  $a_1$  の反応に関連した無差別曲線  $U_0$ 、 $U_1$  および  $U_2$  を示している。無差別曲線  $U_0$  は  $y^* + \Delta y_1$  でレジーム 0 の予算線と接している。また、パネル (b) はレジーム 1 からレジーム 2 への予算線の変化および、変化に対する個人  $a_2$  の反応に関連した無差別曲線  $U_0$ 、 $U_1$  および  $U_2$  を示している。無差別曲線  $U_0$  は  $y^* + \Delta y_0$  でレジーム 0 の予算線に接しており、 $U_2$  はレジーム 2 の予算線に接している。

(注2) パネル (c) はパネル (a) および (b) に対応する、屈曲が存在しない場合における課税所得の密度分布を示している。

(出所) 筆者作成

には、レジーム 0 において  $y \in (y^*, y^* + \Delta y_1]$  を選択していた個人は、課税所得を  $y^*$  に調整することの便益に対して費用が大きいため調整を行わない。図 3 パネル (a) では、調整を行うことと行わないことが無差別である能力  $a_1$  の個人について、レジーム 0 とレジーム 1 における選択を示している。個人  $a_1$  はレジーム 0 において、無差別曲線  $U_0$  の下で  $y^* + \Delta y_1$  を選択していたが、レジーム 1 においては無差別曲線  $U_2$  の下で摩擦費用  $\phi$  を支払い  $y^*$  を選択することで得られる効用水準と、 $y^* + \Delta y_1$  に留まり得られる効用水準（無差別曲線  $U_1$ ）とが等しくなるため以下が成立する。

$$\begin{aligned} & U((1-\tau)y^*, y^*; a_1) \\ & = U((1-\tau-\Delta\tau_1)(y^* + \Delta y_1), \end{aligned}$$

$$(y^* + \Delta y_1); a_1) - \phi \quad (8)$$

ここで、 $a_1$  は所得  $y^* + \Delta y_1$  を選択していた個人の能力である。なお、ここでは最適化摩擦が存在する場合にも屈曲において集群が生じるように、 $\Delta y_1 < \Delta y$  を仮定している。以上から、レジーム 0 では  $(y^* + \Delta y_1, y^* + \Delta y_1]$  を選択していた個人のみが課税所得を  $y^*$  に移動することになるから、この時の過剰集群量  $B_1$  は以下のように書ける。

$$B_1 = \int_{y^* + \Delta y_1}^{y^* + \Delta y_1} h_0(y) dy = h_0(y^*) (\Delta y_1 - \Delta y_1) \quad (9)$$

この  $B_1$  は、図 3 パネル (c) に示した反実仮想分布の範囲では、②から④に対応している。

次に、その後に当該屈曲の直上での限界税率が  $\tau + \Delta\tau_1$  から  $\tau + \Delta\tau_2$  に引き下げられたとする（これをレジーム 2 と呼び、 $\tau_2 < \tau_1$  とする。

図3パネル（b）を参照。）。レジーム2についてもレジーム1のケースと同様で、レジーム0の場合に課税所得  $(y^* + \Delta y_2, y^* + \Delta y_2]$  を選択していた個人は、課税所得を  $y^*$  に調節することになる。

しかし、 $\tau_2 < \tau_1$  であることから、閾値  $y^*$  に課税所得を調節するインセンティブは減税前（レジーム1）よりも低くなるので、 $(y^* + \Delta y_2) < (y^* + \Delta y_1)$  である。この時、もし摩擦が存在していなければ  $(y^* + \Delta y_2, y^* + \Delta y_1]$  の範囲の個人はレジーム2では  $y^*$  に集群することはない。しかし、摩擦が存在する状態でレジーム1から2に移行すると、調整費用がレジーム2の下での最適な所得において得られる便益を上回る所得水準までの個人は、閾値  $y^*$  への集群を継続することになる。つまり、レジーム1から2への調整によって得られる利益と最適化摩擦の費用とが丁度等しくなるような個人  $a_2$  を考えたとき、そのような個人がレジーム0において選択する所得  $y^* + \Delta y_0$  を境界として、 $(y^* + \Delta y_1, y^* + \Delta y_0]$  の範囲を選択していた個人は  $y^*$  での集群を継続し、 $(y^* + \Delta y_0, y^* + \Delta y_1]$  の範囲の個人は所得の調整を行うことになる。

図3パネル（b）では、境界となる個人  $a_2$  の無差別曲線が示されている。上述のように、個人  $a_2$  はレジーム0の下で  $y^* + \Delta y_0$  を選択しているが（無差別曲線  $U_0$ ）、レジーム1の下では閾値  $y^*$  を選択している（無差別曲線  $U_1$ ）。そしてレジーム2の下では、摩擦が存在しない場合には  $(y^* + \Delta y_2)$  の選択（無差別曲線  $U_2$  に対応）が最適になる。しかし、摩擦が存在する場合、閾値から新たに  $(y^* + \Delta y_2)$  に移動する選択と閾値にとどまる選択とが無差別であるため、以下の式が成り立つことになる。

$$\begin{aligned} U((1 - \tau - \Delta\tau_2)y^*, y^*; a_2) \\ = U((1 - \tau - \Delta\tau_2)(y^* + \Delta y_2), \\ (y^* + \Delta y_2); a_2) - \phi \end{aligned} \quad (10)$$

また、この時の過剰集群量  $B_2$  は以下のように書ける。

$$B_2 = \int_{y^* + \Delta y_1}^{y^* + \Delta y_0} h_0(y) dy = h_0(y^*) (\Delta y_0 - \Delta y_1) \quad (11)$$

この  $B_2$  は、図3パネル（c）に示した分布では、②および③に対応している。

以下の議論では、さらに等弾力的な効用関数（3）式を想定してより具体的に考察する。この効用関数の下では、レジーム1の下で導出した（8）式は、

$$\begin{aligned} (1 - \tau)y^* - \frac{a_1}{1 + 1/\eta} \left( \frac{y^*}{a_1} \right)^{1 + 1/\eta} \\ = (1 - \tau - \Delta\tau_1)(y^* + \Delta y_1) \\ - \frac{a_1}{1 + 1/\eta} \left( \frac{y^* + \Delta y_1}{a_1} \right)^{1 + 1/\eta} - \phi \end{aligned} \quad (12)$$

となる。またこの個人のレジーム1における一階条件は  $y^* + \Delta y_1 = a_1(1 - \tau - \Delta\tau_1)^\eta$  だから、これを（12）式に代入して整理すると、 $\Delta y_1$  は未知のパラメータ  $\eta$  および  $\phi$  と関係づけた以下の式として表せる。

$$\begin{aligned} (1 - \tau)y^* \left[ \frac{1}{1 + \eta} \left( 1 - \frac{\Delta\tau_1}{1 - \tau} \right) \left( 1 + \frac{\Delta y_1}{y^*} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{1 + 1/\eta} \left( 1 - \frac{\Delta\tau_1}{1 - \tau} \right) \left( \frac{1}{1 + \Delta y_1/y^*} \right)^{1/\eta} - 1 \right] \\ = \phi \end{aligned} \quad (13)$$

また、（9）式で表された過剰集群量  $B_1$  は、限界集群者に関する1階条件  $y^* + \Delta y_1 = (a + \Delta a)(1 - \tau)^\eta$  および  $y^* = (a + \Delta a)(1 - \tau - \Delta\tau_1)^\eta$  から導かれる  $\Delta y_1 = y^* \left( \left( \frac{1 - \tau}{1 - \tau - \Delta\tau_1} \right)^\eta - 1 \right)$  を用いて以下のように書くことができる。

$$\begin{aligned} B_1 = h_0(y^*) \\ \left( y^* \left( \left( \frac{1 - \tau}{1 - \tau - \Delta\tau_1} \right)^\eta - 1 \right) - \Delta y_1 \right) \end{aligned} \quad (14)$$

したがって、（13）式および（14）式から、 $\Delta y_1$  を消去する形で弾力性  $\eta$  および最適化摩擦  $\phi$  に関する等式が得られる。

次にレジーム1から2への変化に着目して導出した（10）式は、

$$(1 - \tau - \Delta\tau_2)y^* - \frac{a_2}{1 + 1/\eta} \left( \frac{y^*}{a_2} \right)^{1 + 1/\eta}$$

$$= (1 - \tau - \Delta\tau_2) (y^* + \Delta\bar{y}_2) - \frac{a_2}{1 + 1/\eta} \left( \frac{y^* + \Delta\bar{y}_2}{a_2} \right)^{1+1/\eta} - \phi \quad (15)$$

となる。また、この個人に関するレジーム 0 およびレジーム 2 での一階条件は、それぞれ以下のように書ける。

$$y^* + \Delta\bar{y}_0 = a_2 (1 - \tau)^\eta \quad (16)$$

$$y^* + \Delta\bar{y}_2 = a_2 (1 - \tau - \Delta\tau_2)^\eta = (y^* + \Delta\bar{y}_0) \left( 1 - \frac{\Delta\tau_2}{1 - \tau} \right)^\eta \quad (17)$$

ここで (17) 式の 2 行目は、(16) 式を用いている。これらを用いると、(15) 式は以下のように整理できる。

$$\begin{aligned} & (1 - \tau) (y^* + \Delta\bar{y}_0) \left[ \left( 1 - \frac{\Delta\tau_2}{1 - \tau} \right)^{1+\eta} \right. \\ & + \frac{1}{1 + 1/\eta} \left( \frac{1}{1 + \Delta\bar{y}_0/y^*} \right)^{1+1/\eta} \\ & - \left. \left( 1 - \frac{\Delta\tau_2}{1 - \tau} \right) \left( \frac{1}{1 + \Delta\bar{y}_0/y^*} \right) \right. \\ & \left. - \frac{1}{1 + 1/\eta} \left( 1 - \frac{\Delta\tau_2}{1 - \tau} \right)^{1+\eta} \right] = \phi \quad (18) \end{aligned}$$

また、過剰集群量  $B_2$  に関する (11) 式については、(14) 式から以下のように整理できる。

$$B_2 = h_0(y^*) \left( \Delta\bar{y}_0 - \left( \frac{1 - \tau}{1 - \tau - \Delta\tau_1} \right)^\eta + \frac{B_1}{h_0(y^*)} \right) \quad (19)$$

これより、(18) 式および (19) 式から、 $\Delta\bar{y}_0$  を消去する形で弾力性  $\eta$  および最適化摩擦  $\phi$  に関する等式が得られる。

以上から、(13) 式および (14) 式と、(18) 式および (19) 式からそれぞれ得られる  $\eta$  および  $\phi$  に関する式 2 本を用いて、未知のパラメータである  $\eta$  と  $\phi$  を推定することができる。

### III-2. 非識別の問題

集群推定では、ある一時点における税のスケ

ジュールと所得分布のデータをもとに課税所得の弾力性の推定が行われる。これは、税制変更による異時点間の予算線の変動を利用した分析（税制変更アプローチ）では、少なくとも税制変更前後の 2 時点でのパネルデータが必要であるのとは対照的である。集群推定は、一時点のクロスセクションで、かつ個人レベルの情報が存在しない分布データから弾力性を推定できる点で優位性があるのではないかと考えられる。しかし、Blomquist et al. (2021) は集群推定における非識別の問題を指摘し、弾力性のパラメータ  $\eta$  と個人の能力の分布  $f(a)$  とが単一の所得分布からは同時に識別できないことを示している。以下では、II-1 節でのモデルの設定をもとに、この非識別の問題を説明する。

II-1 節で述べたように、屈曲点における過剰集群量  $B$  は

$$B = \int_{y^*}^{y^* + \Delta y} h_0(y) dy$$

と書けた。ここでの識別の問題は、反実仮想密度分布  $h_0(y)$  および  $\Delta y$  の 2 つのパラメータが未知であるにもかかわらず、これら 2 つのパラメータを含む式が 1 つしか存在しないことである。1 つの式から 2 つの構造パラメータを識別することは不可能である。

この問題は、効用関数を Saez (2010) 以降広く用いられている (3) 式の形状を仮定したとしても同様である。効用最大化問題に関する一階条件から得られる課税所得の式

$$y(\tau, \eta, a) = a \cdot (1 - \tau)^\eta$$

から、集群する個人のうち、予算線の閾値上の点に丁度接する個人の能力を  $a^*$  とすると、閾値での課税所得は  $y^* = a^* (1 - \tau)^\eta$  と書ける。一方で、屈曲が存在しない場合には  $y^* + \Delta y$  を選択しているが、屈曲が生じている下では閾値まで調整を行うような限界集群者の課税所得は、 $y^* + \Delta y = (a^* + \Delta a) (1 - \tau)^\eta$  と書ける。つまり、集群が生じる能力の範囲は  $[a^*, a^* + \Delta a] = [y^* (1 - \tau)^{-\eta}, (y^* + \Delta y) (1 - \tau)^{-\eta}]$  となる。

これを用いて過剰集群量  $B$  を表現すると、



$$\begin{aligned}
 B &= \int_{a^*}^{a^* + \Delta a} f(a) da \\
 &= \int_{y^*(1-\tau)^{-\eta}}^{(y^* + \Delta y)(1-\tau)^{-\eta}} f(a) da \quad (20)
 \end{aligned}$$

となる。この(20)式から明らかなように、過剰集群量  $B$  はデータから推定可能であるが、弾力性のパラメータ  $\eta$  および能力の密度関数  $f(a)$  は未知である。また、この2つの未知の情報を含んだ式は当該(20)式のみであるため、弾力性が識別できないことになる。Blomquist et al. (2021) では、より一般的に、任意の課税所得の弾力性  $\eta$  に対して、モデルでの課税所得の分布を実際の分布と一致させられるような、能力の分布  $f(a)$  が常に存在することを示している。

この弾力性が識別できない問題に対して、初期の既存研究では分布に仮定を追加的に課すことで、所得分布と弾力性のパラメータとが1対1に対応するようにしていた。例えば Saez (2010) では屈曲点を挟んで各上下でそれぞれ密度分布が線形であると仮定しており、Chetty et al. (2011) では、屈曲付近で密度が多項式で表現できると仮定している。後続研究でも基本的に同様の仮定を課すことで弾力性の推定を行うことが一般的である。このように、何らかの形で分布に制約を課さない限り、単一の税スケジュールに対する課税所得の分布から個人の税に対する反応行動に関する情報（例えば課税所得の弾力性）を引き出すことはできない。

この非識別の問題は、断絶が生じている場合においても同様である。屈曲の議論と同様に、集群する個人のうち予算線の閾値上の点に丁度接する個人の能力を  $a^*$  とすると、閾値での課税所得は  $y^* = a^*(1-\tau)^\eta$  と書ける。一方、当該断絶における限界集群者（能力  $a^* + \Delta a$ ）は、課税所得が閾値  $y^*$  になる場合と、閾値上方の予算線と接する点の課税所得  $(y^* + \Delta y)$  になる

場合とが無差別である。 $(y^* + \Delta y)$  は、限界集群者の断絶に対する反応を表した(5)式を参考にすると、弾力性  $\eta$  に依存しているから、ある関数  $k(\cdot, \cdot, \cdot)$  を用いて  $y^* + \Delta y = k(a^* + \Delta a, \tau, \eta)$  と書ける。これが陰関数定理によって、ある関数  $l(\cdot, \cdot, \cdot)$  を用いて  $a^* + \Delta a = l(y^* + \Delta y, \tau, \eta)$  と表せるとすると、この時の過剰集群量  $B$  は、

$$B = \int_{a^*}^{a^* + \Delta a} f(a) da = \int_{y^*(1-\tau)^{-\eta}}^{l(y^* + \Delta y, \tau, \eta)} f(a) da \quad (21)$$

となり、集群が生じる能力の範囲は  $[a^*, a^* + \Delta a] = [y^*(1-\tau)^{-\eta}, l(y^* + \Delta y, \tau, \eta)]$  である。つまり(21)式から、断絶の場合においても屈曲の場合と同様に、過剰集群量  $B$  はデータから推定可能であるが、弾力性  $\eta$  および能力の密度関数  $f(a)$  は未知であるから(21)式のみでは識別ができないことがわかる。

以上の問題意識から、Blomquist et al. (2021) は密度分布に一定の制約を課すことで過剰集群量の大きさの上限と下限を決定することで弾力性の取り得る範囲を推定する方法を提示している<sup>16)</sup>。しかし、Saez (2010) と同様のデータを用いた例では、課税所得の弾力性の取りうる範囲は非常に広がってしまうことが指摘されている。この結果は、集群推定そのものを否定するわけではない。密度分布にどのような仮定を課すのか、それをどの程度弱めると弾力性の取りうる範囲はどの程度変化するのか、といった推定値の感度を評価するために有用であると考えられる。同様に集群推定から目的のパラメータを識別できないことを説明する Bertanha et al. (2021) や Goff (2022) でも、密度分布に対して特定の形状制限を課し、反実仮想分布を構築する部分識別戦略を提案している。例えば Bertanha et al. (2021) は、データに打ち切り (censoring) が存在する場合の統計的手法を集群推定に応用できることに着目し、対処方法

16) 脚注14で述べたように、Gelber et al. (2020) では対照群と考えられるサンプルに関する分布を反実仮想分布として利用しているが、これは非識別の問題が念頭にある。屈曲に直面していない対照群の能力の分布が、観察している分布を構成する個人の能力分布と等しいのであれば、対照群で観測される所得分布は反実仮想での所得分布として機能するからである。

を提案している。より具体的には、分布の傾きに制約が存在すれば課税所得の弾力性の上限と下限が特定できることを示し、推定量としてトービットと打ち切り回帰でのアプローチを提案している。ただし、提案された推定方法は最適化摩擦を許容していないため、現実のデータに対する実用性に乏しいという問題がある。一方、Aronsson et al. (2021) はよりパラメトリックな形で、集群推定に最尤推定量を組み合わせる方法を提案しているが、こちらは観測されない能力の異質性および最適化摩擦を許容した枠組みとなっている。

### Ⅲ－３．集群範囲の識別方法について

推定を行うにあたり、集群が生じている閾値付近の範囲の特定方法については、基本的に目視で判断する方法が取られてきた。既存研究では、このように決定した集群範囲を変化させても推定値が大きく変動しないことをもって、得られた推定値の頑健性を担保する手続きが採られてきた。しかし、集群範囲の選択は推定値の効率性や正確性に影響を及ぼすため非常に重要な手続きである。例えば、真の集群範囲よりも広く範囲を取ってしまうと、反実仮想密度分布の推定において利用できる観測値を失ってしまうため非効率となる。また、逆に範囲を狭めて取ってしまうと、誤った反実仮想密度分布を推定してしまうことになり、当然弾力性の推定値にもバイアスが生じる。この問題に対して、Bosch et al. (2020) ではデータから一定の情報量規準に基づいて、規則的に範囲を選択する方法を提案している。彼らは、モンテカルロ・シミュレーションから、目視で範囲を決定する既存の方法と比較して、弾力性がより正確に推定できることを示している<sup>17)</sup>。

より具体的には、まず閾値付近で範囲の上限と下限を定め、反実仮想分布の推定に利用しない除外領域を設定する。残りのデータ点を用い

て多項回帰を行い、信頼区間を含む反実仮想での各ビンの度数を予測する。そして、閾値周辺において実際の度数が信頼区間の外側にあるビンについて観察し、これらのうちで閾値から連続して外側に観測されている範囲を集群範囲とする。この操作を、任意の上限と下限についての組み合わせで実行することによって得られた最小値と最大値から、集群範囲の上限と下限を得ることができる。

### Ⅲ－４．集群推定と税制変更を利用した推定との比較について

課税所得の弾力性に関して、集群推定から得られた推定値は、税制変更を利用した税制変更アプローチから得られた推定値と比較して、一般的に小さくなるのが複数の文献によって指摘されてきた。例えば、米国の研究によると、税制変更アプローチから得られる給与所得者の弾力性推定値が0.12-0.40 (Saez et al. 2012) であるのに対して、集群推定から得られた推定値はゼロに近い (Saez 2010)。スウェーデンの研究においても、税制変更アプローチから得られた値が男性給与所得者では0.19、女性給与所得者では1.39であるのに対し (Blomquist and Selin 2010)、集群推定値はゼロ近辺である (Bastani and Selin 2014)。また、デンマークの研究でも、操作変数推定から得られた値が0.2 (Kleven and Schultz 2014) に対して、集群推定から得られた値は0.01 (Chetty et al. 2011) である。このような推定方法の違いによる弾力性の差に関して、Chetty (2012) や Kleven and Schultz (2014) などでは、Ⅲ－１節で説明した最適化摩擦の存在が原因だと議論されている。つまり、観測されるデータから推定された弾力性については集群推定と税制変更を利用した推定とで差が存在するが、長期的な視点での構造的な弾力性については、差は縮小するということである。

17) Dekker and Schweikert (2021) では、モンテカルロ・シミュレーションにより Bosch et al. (2020) の手法をデータから範囲を決定する他の方法と比較し、その優位性を確認している。

以上の議論に対して、He et al. (2021) では、課税所得に関する中国の行政パネルデータを用いて集群推定と税制変更アプローチによる推定の結果を直接比較し、その違いを生み出す要因を分析している。彼らの結果によると、税制変更アプローチによる推定値が、最適化摩擦の存在を考慮した構造的な弾力性を求めていると考えられる集群推定値を8倍も上回っており、両者に大きな差が観察される。彼らはこの推定値の差は、各推定方法が経済主体の異なる行動反応を捉えているからだとして議論し、そのメカニズムを説明するモデルを提示している。つまり、経済主体は税に対して一時的な反応と永続的な反応の2つを行うと考え、集群推定が識別する経済主体の行動反応は、一時的な課税所得の調整によるものであるために推定値が小さいが、税制変更アプローチによる推定値は永続的な反応を捉えるために推定値が大きくなると説明している。また、Aronsson et al. (2022) では、課税所得の弾力性の推定における集群推定量と税制変更アプローチによる推定量についてモン

テカルロ・シミュレーションを行い、バイアス（一致性）と精度（有効性）を評価している。それによれば、集群推定量は税制変更アプローチによる推定量と比較して精度が高いものの、前者は下方バイアスが多くの場合生じること、後者は一定の条件下ではバイアスが小さくなることを指摘している。加えて、彼らは推定の質を向上させるための新たな推定量の提案を行い、当該推定量はバイアスと精度の点で他の推定量と比較して高いパフォーマンスを示すと議論している。

推定方法の違いによる推定値の差が何を原因として生じているのかについては未だ十分に研究が行われておらず、各推定方法が特にどのような条件で高いパフォーマンスを示すのかについても研究が少ないのが現状である。しかし、課税所得の弾力性の推定に関しては、これまでに世界中で盛んに研究が進められてきた分野であり、各推定量から得られた推定値がどのような特徴を持つのかを把握することが重要であると考えられる。

## IV. おわりに

本稿では、近年財政・公共経済学分野をはじめとして、幅広い分野で利用されている集群推定法について、基本的な推定手法の紹介を行った。加えて、近年の手法の発展状況、手法に対する批判および関連する議論についても紹介した。

集群推定法は、経済主体の効用関数（目的関数）を特定の形式に仮定する必要や、反実仮想密度分布に関する仮定が必要になる等の問題は存在するが、課税所得に関する分布などの注目する経済変数の屈曲や断絶周辺でのクロスセクションでの分布さえ取得できれば、推定が実行可能であるという点で優れた分析手法である。しかし、少ない情報量で実行可能であるからこそ、分布の正確性やデータの正確性が非常に重

要となる。つまり、サーベイデータのような回答者のノイズが生じやすいデータは分析に不向きであり、逆に先進国における税務データのように比較的ノイズが小さいデータが分析には適しているといえる。

しかし日本では、これまで他の先進国と比較して税務データの研究利用が進んでいなかったこともあり、集群推定を用いた研究が（特に個人所得税に関しては）少ないのが現状である。ただ、近年の動きとして、国税庁との共同研究という形式での税務データの研究利用が開始されており、また東京大学政策評価研究教育センター（CREPE）が複数の地方自治体から税務データの提供を受け、研究を実施しているなど

の動きが出てきている。このように日本でも、今後税務データの研究利用が浸透していく中

で、集群推定法や関連する最新の発展手法の利用も増加していくことが期待される。

## 参 考 文 献

- 市川翼・アルドチュルワンメナカ・恩地一樹 (2021)「消費税における閾値と小規模企業の集積：2019年増税への展望」『日本経済研究＝JCER Economic Journal』, 80(2), pp. 25-56.
- 伊藤公一朗 (2017)『データ分析の力 因果関係に迫る思考法』光文社新書.
- 林正義 (2020)「課税政策におけるEBPM—労働所得税とマイクロシミュレーションの活用を中心に」, 大橋弘 (編著) 田中隆一他 (著) 『EBPMの経済学 エビデンスを重視した政策立案』第5章 東京大学出版会.
- 横山泉・児玉直美 (2016)「女性の労働と税：データを用いた現状分析」, 特集 税制改革：エビデンスに基づいた政策提言, 『フィナンシャル・レビュー』, 2, pp. 49-76.
- Adam, S., Browne, J., Phillips, D., Roantree, B. (2021), “Frictions and Taxpayer Responses: Evidence from Bunching at Personal Tax Thresholds”, *International Tax and Public Finance*, 28(3), pp. 612-653.
- Aghion, P., Akcigit, U., Lequien, M., Stantcheva, S. (2017), “Tax Simplicity and Heterogeneous Learning”, *NBER Working Paper*, w24049.
- Aronsson, T., Jenderny, K., Lanot, G. (2021), “Maximum Likelihood Bunching Estimators of the ETI”, (Available at: <http://www.usbe.umu.se/ues/ues987.pdf>).
- Aronsson, T., Jenderny, K., Lanot, G. (2022), “The Quality of the Estimators of the ETI”, *Journal of Public Economics*, 212, 104679.
- Bastani, S., Selin, H. (2014), “Bunching and Non-Bunching at Kink Points of the Swedish Tax Schedule”, *Journal of Public Economics*, 109, pp. 36-49.
- Bertanha, M., McCallum, A. H., Seeger, N. (2021), “Better Bunching, Nicer Notching”, *arXiv preprint*. arXiv:2101.01170.
- Blomquist, S., Newey, W. K., Kumar, A., Liang, C. Y. (2021), “On Bunching and Identification of the Taxable Income Elasticity”, *Journal of Political Economy*, 129(8), pp. 2320-2343.
- Blomquist, S., Selin, H. (2010), “Hourly Wage Rate and Taxable Labor Income Responsiveness to Changes in Marginal Tax Rates”, *Journal of Public Economics*, 94 (11-12), pp. 878-889.
- Bosch, N., Dekker, V., Strohmaier, K. (2020), “A Data-Driven Procedure to Determine the Bunching Window: An Application to the Netherlands”, *International Tax and Public Finance*, 27(4), pp. 951-979.
- Chetty, R. (2009), “Sufficient Statistics for Welfare Analysis: A Bridge between Structural and Reduced-Form Methods”, *Annual Review of Economics*, 1(1), pp. 451-488.
- Chetty, R. (2012), “Bounds on Elasticities with Optimization Frictions: A Synthesis of Micro and Macro Evidence on Labor Supply”, *Econometrica*, 80(3), pp. 969-1018.
- Chetty, R., Friedman, J. N., Olsen, T., Pistaferri, L. (2011), “Adjustment Costs, Firm Responses, and Micro vs. Macro Labor Supply Elasticities: Evidence from Danish Tax Records”, *Quarterly Journal of Economics*, 126(2) pp. 749-804.
- Chetty, R., Friedman, J. N., Saez, E. (2013), “Using Differences in Knowledge Across Neighborhoods to Uncover the Impacts of the EITC on Earnings”, *American Economic Review*, 103(7), pp. 2683-2721.

- Chetty, R., Looney, A., Kroft, K. (2009), "Salience and Taxation: Theory and Evidence", *American Economic Review*, 99 (4), pp. 1145-1177.
- Currie, J., Kleven, H., Zwiars, E. (2020), "Technology and Big Data Are Changing Economics: Mining Text to Track Methods", *AEA Papers and Proceedings*, 110, pp. 42-48.
- Dekker, V., Schweikert, K. (2021), "A Comparison of Different Data-driven Procedures to Determine the Bunching Window", *Public Finance Review*, 49(2), pp. 262-293.
- Devereux, M. P., Liu, L., Loretz, S. (2014), "The Elasticity of Corporate Taxable Income: New Evidence from UK Tax Records", *American Economic Journal: Economic Policy*, 6(2), pp. 19-53.
- Feldstein, M. (1999), "Tax Avoidance and the Deadweight Loss of the Income Tax", *Review of Economics and Statistics*, 81(4), pp. 674-680.
- Gelber, A. M., Jones, D., Sacks, D. W. (2020), "Estimating Adjustment Frictions Using Nonlinear Budget Sets: Method and Evidence from the Earnings Test", *American Economic Journal: Applied Economics*, 12(1), pp.1-31.
- Goff, L. (2022), "Treatment Effects in Bunching Designs: The Impact of the Federal Overtime Rule on Hours", *arXiv preprint*. arXiv:2205.10310.
- Gruber, J., Saez, E. (2002), "The Elasticity of Taxable Income: Evidence and Implications", *Journal of Public Economics*, 84(1) pp. 1-32.
- Harju, J., Matikka, T., Rauhanen, T. (2019), "Compliance Costs vs. Tax Incentives: Why Do Entrepreneurs Respond to Size-Based Regulations?", *Journal of Public Economics*, 173, pp. 139-164.
- He, D., Peng, L., Wang, X. (2021), "Understanding the Elasticity of Taxable Income: A Tale of Two Approaches", *Journal of Public Economics*, 197, 104375.
- Ito, K., Sallee, J. M. (2018) "The Economics of Attribute-Based Regulation: Theory and Evidence from Fuel Economy Standards", *Review of Economics and Statistics*, 100(2), pp. 319-336.
- Jakobsen, K. M., Sogaard, J. E. (2022), "Identifying Behavioral Responses to Tax Reforms: New Insights and a New Approach", *Journal of Public Economics*, 212, 104691.
- Kawakubo, T., Suzuki, T., Asao, K. (2022), "Tax Avoidance or Compliance Costs Avoidance? Evidence from VAT Reforms in Japan", *PRI Discussion Papers*, 22A(02).
- Kleven, H. J. (2016), "Bunching", *Annual Review of Economics*, 8, pp. 435-464.
- Kleven, H. J., Schultz, E. A. (2014), "Estimating Taxable Income Responses Using Danish Tax Reforms", *American Economic Journal: Economic Policy*, 6(4), pp. 271-301.
- Kleven, H. J., Waseem, M. (2013), "Using Notches to Uncover Optimization Frictions and Structural Elasticities: Theory and Evidence from Pakistan", *Quarterly Journal of Economics*, 128 (2), pp. 669-723.
- Miyazaki, T., Ishida, R. (2022), "Estimating the Elasticity of Taxable Income: Evidence from Top Japanese Taxpayers", *Japan and the World Economy*, 61, 101116.
- Onji, K. (2009). "The Response of Firms to Eligibility Thresholds: Evidence from the Japanese Value-Added Tax", *Journal of Public Economics*, 93(5-6), pp. 766-775.
- Saez, E. (2010), "Do Taxpayers Bunch at Kink Points?", *American Economic Journal: Economic Policy*, 2(3), pp. 180-212.
- Saez, E., Slemrod, J., Giertz, S. H. (2012), "The Elasticity of Taxable Income with Respect to Marginal Tax Rates: A Critical Review", *Journal of Economic Literature*, 50(1), pp. 3-50.
- Tazhitdinova, A. (2020), "Do Only Tax Incentives Matter? Labor Supply and Demand Responses

- to an Unusually Large and Salient Tax Break”, *Journal of Public Economics*, 184, 104162.
- Yokoyama, I. (2018), “How the Tax Reform on the Special Exemption for Spouse Affected the Work-Hour Distribution”, *Journal of the Japanese and International Economies*, 49, pp. 69-84.
- Zaresani, A. (2020), “Adjustment Costs and Incentives to Work: Evidence from a Disability Insurance Program”, *Journal of Public Economics*, 188, 104223.