

政府債務とマクロ経済

—異質な家計モデルによる分析の紹介—^{*1}

高橋 修平^{*2}

要 約

本稿では、家計の異質性を考慮した動学一般均衡モデルを用いて、政府債務がマクロ経済と厚生に与える影響を整理する。モデルには、労働生産性（賃金）の異なる家計が多数存在する。家計は労働生産性の不確実性に直面し、資産と労働時間を調整することで消費と余暇を平準化しようとする。その結果、家計間で消費、余暇、所得、資産などの格差が生まれる。この環境で政府債務・GDP比率が長期的に上昇すると、利子率は上昇し、資本・GDP比率は低下する。また、標準的な方法で厚生を評価すると、政府債務・GDP比率の上昇は消費と余暇の不確実性を減らすことで厚生を改善する一方、格差を拡大することで厚生を悪化させる。これらの影響の大きさは、労働生産性リスクや所得移転の大きさに依存する。

キーワード：政府債務，マクロ経済，家計の異質性，厚生，一般均衡

JEL Classification：E62，H63

I. はじめに

近年、多くの国において政府債務・GDP比率が上昇している。そのような政府債務の増加はマクロ経済に様々な影響を及ぼすことが指摘されている¹⁾。したがって、政府債務とマクロ経済の関係は、多角的に分析することが望ましい。本稿では、Aiyagari and McGrattan (1998)、Flodén (2001)などに倣い、家計間の資産や

所得の違い（異質性）を考慮した動学一般均衡モデルに基づき、政府債務が長期的にマクロ経済と厚生に与える影響を整理する²⁾。特に、日本経済を対象に政府債務の影響を分析したNakajima and Takahashi (2017)の内容を紹介するとともに、Nakajima and Takahashi (2017)ではあまり触れていなかった、所得り

* 1 本稿で紹介する分析は、Nakajima and Takahashi (2017)の分析に基づいている。共著者である中嶋智之氏、詳細なコメントを下された小枝淳子氏、論文検討会議の参加者に感謝を申し上げる。残った誤りはすべて筆者の責任である。

* 2 京都大学経済研究所准教授

1) 例えば、Elemendorf and Mankiw (1999)を参照。

2) 近年、家計の異質性を考慮したモデルを用いた政策分析が盛んに行われている。その理由としては、格差の広がり、ミクロデータの整備、コンピュータや数値計算法の発展が指摘されている。同時に、そのようなモデルにおける均衡の存在や唯一性など理論的な分析も進んでいる。最近の例としては、Zhu (2020)がある。

スクや再分配政策の大きさがマクロ経済に与える影響についても議論する。

本稿のモデルには、無限期生きるリスク回避的な家計が多数存在する。それらの家計は、それぞれ労働生産性（賃金）リスクに直面し、毎期、消費、労働時間、資産保有の選択を行う。金融市場は非完備であり、家計は資産と労働時間を調整することで消費と余暇の変動を小さくしようとする。その結果、家計の間で資産、労働所得、消費などの格差が生じる。企業は、家計が供給する資本と労働を用いて、財の生産を行う。政府は、自身の消費、家計に対する一括所得移転、政府債務の利払いを、所得税収、消費税収、新規の政府負債発行で賄う。

このような環境では、リカードの等価命題が成立せず、政府債務・GDP比率の変化がマクロ経済に影響を与える。そして、消費と余暇の「水準」、「不確実性」、「格差」の変化を通じて厚生に影響を及ぼす。第一に、家計は消費と余暇から効用を得るため、政府債務が消費と余暇の平均水準を変化させることで厚生に影響を与える。第二に、家計はリスク回避的であるため、政府債務が消費と余暇の不確実性を変化させることで厚生に影響を与える。第三に、家計間で消費と余暇の格差が存在するため、政府債務が格差を変化させることで厚生に影響を及ぼす。これまでマクロ経済学では不確実性のない代表的家計モデルを政策分析に用いることが多かったが、そうした分析では政策効果のうち平均水準を通じたものしか捉えられない。本稿のようなモデルを用いることにより、不確実性と格差を通じて政府債務が厚生に与える影響も分析可能となる。

均衡は解析的には求められないため、数値計算を用いて計算する。そのために、先行研究やデータを参考に1995年から2013年の日本経済に合うようにパラメータ値を設定する³⁾。また、ベースラインの分析では、政府債務・GDP比

率の変化に対して、政府の予算制約を満たすように所得税率を内生的に調整する。

分析結果は以下の通りである。マクロ経済については、政府債務・GDP比率が上昇すると、利子率が上昇する。そして、クラウディング・アウトにより、資本・GDP比率は低下する。また、政府の利払い費が増えるため、所得税率は上昇する。GDP、消費、労働時間はすべて減少する⁴⁾。例えば、政府債務がGDPの78%（1995年から2013年の平均）から200%に増加すると、利子率は1.8%から1.9%に上昇し、GDPは2.4%減少する。

モデルには資産や所得の異なる多数の家計が存在するため、厚生の評価は簡単ではない。本稿では、Aiyagari and McGrattan (1998) や Flodén (2001) に倣い、すべての家計を同じウエイトで評価する社会的厚生関数を用いる。さらに、Flodén (2001) の手法を用いて、政府債務が厚生に与える影響を消費と余暇の「格差」、「不確実性」、「水準」を通じた影響に分解する。政府債務・GDP比率の上昇は不確実性を減少させることで厚生を改善する一方、格差を広げることで厚生を悪化させる。水準については、政府債務が増えると最初は改善し、その後悪化する。厚生全体に対する影響はこれら3つの影響の相対的な大きさに依存し、政府債務・GDP比率が上昇すると厚生は最初は改善し、その後悪化する。

これらの結果の頑健性を確認するため、異なるパラメータ値や消費税率で政府予算を調整するケースの分析も行った。その結果、ベースライン分析で示された政府債務のマクロ経済や厚生に対する影響は定性的には頑健であるが、影響の定量的な大きさは労働生産性リスクや所得移転の大きさに依存することが明らかとなった。また、既存研究で指摘されている通り、労働生産性リスクの上昇と所得移転の減少は利子率の水準を低下させ、資本・GDP比率を上昇

3) 数値計算方法については補論2を参照のこと。

4) 均斉成長経路ではGDPや消費は成長し続ける。ここでは、ある時点のGDPや消費が減少することを意味している。

させることも確認した。

関連研究は以下の通りである。第一に、マクロ経済学の観点から政府債務の影響をサーベイしたものとしては、Elemendorf and Mankiw (1999) がある。Elemendorf and Mankiw (1999) は政府債務の長期的な影響のうち定量的に評価可能なものとして、資本蓄積の減少と税率の上昇を挙げている。本稿のモデルでも、これらの影響は観察される。さらに Elemendorf and Mankiw (1999) は、政府債務増加の影響としてその国の国際的リーダーシップの低下などを挙げているが、それらについては本稿では扱わない。

第二に、本稿で扱うような家計の異質性を含む動学一般均衡モデルは、様々な政策分析に利用されている。Aiyagari and McGrattan (1998) は政府債務を分析し、Flodén (2001) は政府債務と一括所得移転がマクロ経済と厚生に与える影響を分析している。これらの先行研究は米国経済を対象にしているが、Nakajima and Takahashi (2017) は日本経済を対象に同様の分析を行っている。また、Fève, Matheron, and Sahuc (2018) は税収のラフファー曲線を、Alonso-Ortiz and Rogerson (2010) は離散的労働供給を仮定したモデルに基づき労働所得税と一括所得移転の影響を、それぞれ分析している。Nakajima and Takahashi (2020) は、消費税と一括所得移転の影響を離散的労働供給と連続的労働供給のケースで比較している。

第三に、本稿の分析は日本の財政状況の研究とも関連している。Broda and Weinstein (2005), Doi et al. (2011), Hoshi and Ito (2014) は政府の予算制約式に基づき、政府債務を長期的に安定化させるための政策を分析したものである。İmrohoroglu and Sudo (2011a, 2011b), Hansen and İmrohoroglu (2016) は、代表的家計を想定する動学一般均衡モデルを用いて日本の財政状況の分析をしている。これらの先行研究と比較したときの本稿の特徴は、家計の異質性を含む動学一般均衡モデルを用いて政府債務が厚生に与える影響を分析している点にある。また、Arai and Ueda (2013), İmrohoroglu et al. (2016), Braun and Joines (2015), Kitao (2015) は世代重複モデルを用いている。これらの先行研究は、家計のライフサイクルを取り入れる一方、政府債務のマクロ経済および厚生に対する影響についてはそれほど分析を行っていない。一方、本稿で紹介する分析は、ライフサイクルを捨象した状況で政府債務がマクロ経済や厚生に与える影響に焦点を当てている。

本稿の構成は以下の通りである。第Ⅱ節はモデルの概要を説明する。第Ⅲ節はパラメータ値の設定を行う。第Ⅳ節は政府債務がマクロ経済と厚生に与える影響を分析する。第Ⅴ節は結果の頑健性を確認する。第Ⅵ節は結論である。補論ではモデルの詳細、数値計算と厚生評価の方法を説明する。

Ⅱ．モデルの概要

本稿のモデルは、Aiyagari and McGrattan (1998), Flodén (2001) のモデルに消費税を導入した Nakajima and Takahashi (2017) のモデルと同じものである。モデルには、代表的企業、多数の家計、政府が存在する。本節ではモデルの概要を示す。モデルの詳細は補論1で

説明する。

Ⅱ－1 企業

代表的企業は労働と資本を用いて財を生産する。生産関数は、

$$Y = K^{\theta} (zN)^{1-\theta} \quad (1)$$

である。ここで、 Y は産出量、 K は資本投入量、 N は労働投入量、 $\theta \in (0, 1)$ は資本シェアである。生産性 z は一定率 $g \geq 0$ で成長する。すなわち、慣例に従い次期の値をプライム付きで表記すると、

$$z' = (1+g)z \quad (2)$$

である。

代表的企業は資本に対するリターン r と賃金率 w を所与として、利潤を最大化するように資本投入と労働投入を決定する。利潤最大化の一階条件は、

$$r = \theta z^{1-\theta} K^{\theta-1} N^{1-\theta} - \delta \quad (3)$$

$$w = (1-\theta) z^{1-\theta} K^{\theta} N^{-\theta} \quad (4)$$

となる。ここで、 $\delta \in (0, 1)$ は資本の減耗率である。

II-2 家計

経済には家計が多数（測度1）存在する。家計は毎期1の時間を持っている。家計は消費 c から効用を、労働 h から不効用を得る。Flodén（2001）に従い、瞬時的効用関数 $u(c, h)$ は、相対的リスク回避度を μ とすると、 $\mu \neq 1$ 、 $\mu > 0$ のとき、

$$u(c, h) = \frac{1}{1-\mu} \left\{ c^{1-\mu} \exp \left[- (1-\mu) \kappa h^{1+\frac{1}{\varphi}} \right] \right\} \quad (5)$$

とする⁵⁾。ここで、 $\kappa > 0$ は労働の不効用のパラメータ、 $\varphi > 0$ は労働供給の弾力性である。

家計は第0期から無限期までの割引期待効用の和を最大化しようとする。すなわち、家計の目的関数は、

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, h_t) \quad (6)$$

である。ここで、 E_0 は第0期の情報集合に基づく条件付き期待値、 $\beta \in (0, 1)$ は割引因子である。

家計間には労働生産性の違いが存在する。家計の労働生産性はFlodén（2001）、Flodén and

Lindé（2001）に倣い、二つの要素から構成される。第一に、第0期の初めに決まり以後変化しない、永続的な生産性 x が家計間で異なる。第二に、家計間で独立に確率的に変化する、一時的な労働生産性 e の違いが家計間に存在する。したがって、家計の時間当たり賃金は wxe であり、家計は賃金の不確実性に直面している。

資産市場は非完備であり、資本と政府債務という二つの無リスク資産のみが存在する。これらの資産は家計にとって完全代替的であり、同じリターン r を生み出す。家計は資産保有と労働供給を調整することで、一時的な労働生産性の変動に起因する労働所得の変動に対して、消費と余暇を平準化しようとする。家計の予算制約式は、

$$(1+\tau_c)c + a' \leq [1+(1-\tau)r]a + (1-\tau)wxe h + T \quad (7)$$

である。ここで、 τ_c は消費税率、 τ は所得税率、 T は政府から家計への一括所得移転である⁶⁾。また、資産は非負でなければならないという借入制約 $a' \geq 0$ も存在する。

II-3 政府

政府は、政府消費、家計に対する一括所得移転、政府債務の利払い費を、新たに発行する政府債務、資本所得と労働所得に対する税、消費税で賄う。したがって、政府の予算制約式は、

$$G + T + rB = B' - B + \tau[wN + r(K+B)] + \tau_c C \quad (8)$$

となる。ここで、 G は政府消費、 B は政府債務、 C は民間（総）消費である。

5) $\mu = 1$ の場合は、 $u(c, h) = \ln c - \kappa h^{1+\frac{1}{\varphi}}$ である。

6) 簡単のため、資本所得税率、労働所得税率は同じであるとする。

Ⅲ．パラメータ値と格差

本節ではベースラインのパラメータ値を設定する。そして、モデルと日本経済における資産と労働所得の格差を比較する。

Ⅲ－１ パラメータ値

Nakajima and Takahashi (2017) 同様、1995年から2013年の日本経済に合うようにベースラインのパラメータ値を設定する（表1）。モデルの1期間は1年とする。資本の減耗率 δ は0.06、資本シェア θ は0.37である。相対的リスク回避度 μ は1.5、労働供給の弾力性 φ は0.5とする。これらの値は、Hayashi and Prescott (2002), Sugo and Ueda (2008), Nutahara (2015) など、動学一般均衡モデルを用いた日本経済分析で使われている値と近いものである。

成長率と財政政策については、まず、国民経済計算（SNA93）を用いる。1995年から2013

年の実質GDPの成長率 g は0.9%である。政府消費・GDP比率 G/Y は0.180、政府所得移転・GDP比率 T/Y は0.141である。さらに、IMF World Economic Outlook (October 2014) によると、政府（純）債務・GDP比率 B/Y は0.78である。消費税率は1995年から2013年のほぼすべての間で5%であったため、 τ_c は0.05とする。所得税率 τ は政府の予算制約式を満たすように内生的に決める。

次に、家計の労働生産性に関わるパラメータを設定する。永続的な生産性 x の取りうる値は $\ln x \sim N(0, \sigma_x^2)$ を離散化することで得る。一時的な生産性 e の取りうる値及び遷移確率は、Tauchen (1986) の手法を用いて $\ln e' = \rho \ln e + \epsilon'$ 、 $\epsilon' \sim N(0, \sigma_{\epsilon}^2)$ というAR(1)過程を離散化することによって求める。ただし、 ϵ' は時間と家計の間で独立である。通常、これら

表1 ベースラインのパラメータ値

記号	意味	値
δ	資本減耗率	0.06
θ	資本シェア	0.37
μ	相対的リスク回避度	1.5
φ	労働供給弾力性	0.5
g	成長率	0.009
G/Y	政府消費・GDP比率	0.180
T/Y	所得移転・GDP比率	0.141
B/Y	政府債務・GDP比率	0.78
τ_c	消費税率	0.05
ρ	一時的な生産性の粘着性	0.90
σ_e	一時的な生産性ショックの標準偏差	0.1754
σ_x	永続的な生産性の標準偏差	0.2530
κ	労働不効用	22.05
β	割引因子	0.9929

のパラメータ (ρ , σ_ϵ , σ_x) の値は賃金パネルデータを用いて推定されるが、そのような分析は日本では限られている。そこで本稿では、Lise et al. (2014) で示された日本の賃金分散に合うように、これらのパラメータ値を設定する。具体的な手順は以下の通りである。まず、日本における対数残余賃金の分散は0.162であるが、モデルではこの残余賃金のばらつきは一時的な労働生産性の違いにより生み出されると仮定する。つまり、 $\frac{\sigma_\epsilon^2}{1-\rho^2}=0.162$ とする。

さらに、他国のデータを用いた分析によると、一時的な労働生産性は粘着性が高い。例えば、Flodén and Lindé (2001) によると、米国では $\rho=0.914$ 、スウェーデンでは $\rho=0.814$ である。また、米国に関する複数の研究に基づき、Alonso-Ortiz and Rogerson (2010) は $\rho=0.94$ と設定している。そこで本稿では、 $\rho=0.90$ とし、 $\sigma_\epsilon=0.1754$ と設定する。次に、Lise et al. (2014) によると日本の対数賃金の分散は0.226である。本稿では、モデルの賃金分散がこの値になるように σ_x を選ぶことにする。すなわち、 $\frac{\sigma_\epsilon^2}{1-\rho^2}+\sigma_x^2=0.226$ 、したがって $\sigma_x=0.2530$ とする。

最後に、割引因子 β と労働の不効用 κ は、実質利子率と平均労働時間が日本経済の値に合

うように設定する。具体的には、税引き後の実質利子率 $(1-\tau)r$ は1.81%，平均労働時間は0.207をターゲットとする。実質利子率のターゲットはBraun and Jones (2015)と同様に計算する。すなわち、政府債務の利子率に20%の税率を課し、CPIインフレ率を用いて実質化する。平均労働時間のターゲットはNutahara (2015)と同様に計算する。具体的には、雇用者数と雇用者当たりの労働時間を掛け合わせ、それを労働人口で割り、さらに1年の時間で割ることで求める。雇用者数と雇用者当たりの労働時間は国民経済計算から、労働世代人口はFederal Reserve Bank of St. LouisのFREDデータベースから得る。結果として得られた値は、 $\beta=0.9929$ 、 $\kappa=22.05$ である。

Ⅲ－２ 格差

Lise et al. (2014) によると、日本における純金融資産のジニ係数は0.62、トップ10%のシェアは0.43であり、労働所得のジニ係数は0.26、トップ10%シェアは0.21である。モデルでは、(純金融)資産のジニ係数は0.50、トップ10%シェアは0.30である。また、労働所得のジニ係数は0.36、トップ10%シェアは0.26である。したがって、モデルの格差は日本の格差と概ね整合的である。

Ⅳ. 結果

本節では、政府債務・GDP比率とマクロ経済および厚生を分析する。ベースラインの分析では、Aiyagari and McGrattan (1998)、Flodén (2001) に倣い、政府債務・GDP比率を変化させ、(8)式を満たすように所得税率 τ を内生的に調整する。他の政策変数は固定す

る⁷⁾。第Ⅳ－1節はマクロ変数に焦点を当て、第Ⅳ－2節では厚生について議論する。

Ⅳ－１ マクロ変数

図1は、政府債務・GDP比率の変化がマクロ変数にどのような影響を与えるのかを示して

7) 第Ⅴ－2節では消費税率を調整するケースの分析を行う。

いる。横軸は、政府債務・GDP比率为 -2 （政府債務がGDPの -200% ）から 2 （政府債務がGDPの 200% ）まで取っている。政府債務・GDP比率が上昇すると、税引き後の利子率（After-tax interest rate）が上昇し、資本・GDP比率（Capital）は低下する。例えば、政府債務が基準値であるGDPの 78% から 200% まで増加すると、税引き後利子率は 1.81% から 1.90% まで上昇する。一方、資本と政府債務を合わせた家計の資産・GDP比率（Capital+Debt）は上昇する。所得税率（Income tax rate）は、政府債務が増えていくと、利払い費が増えるため上昇する。ただし、政府債務が負の場合、すなわち政府が正の資産を持つ場合は、債務が増えると（資産が減ると）利子率が上昇し政府の資産収入が増加、そして税率が低下することもある。税引き後賃金率・GDP比率は、最初は上昇するが、その後低下する。GDP（Output）、総労働時間（Hours worked）、民間消費（Consumption）は、政府債務の増加と

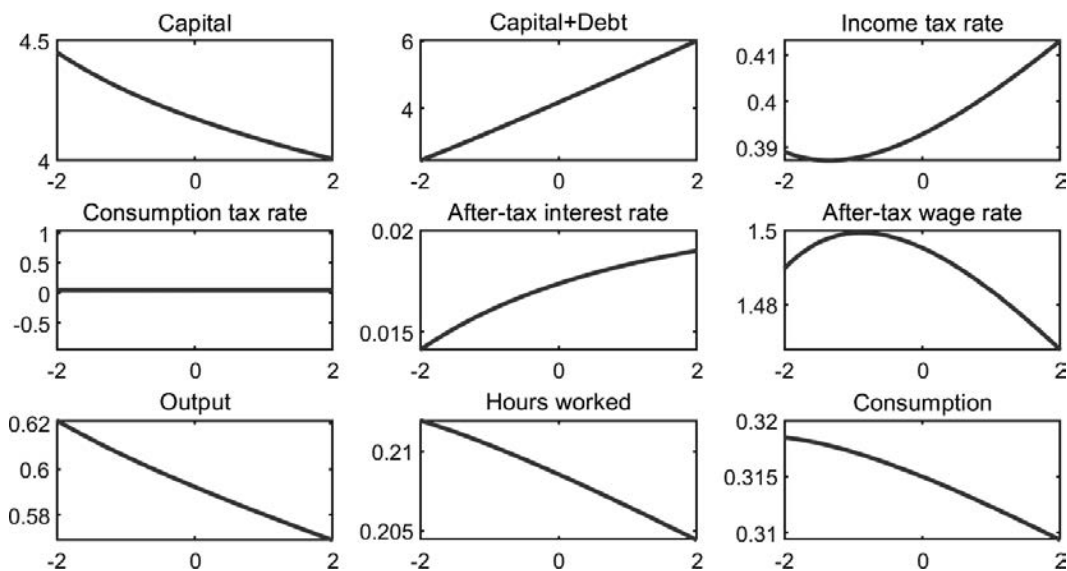
ともに減少する⁸⁾。例えば、政府債務がGDPの 78% から 200% まで増加すると、GDPは 0.583 から 0.569 と 2.35% 減少する。

Ⅳ-2 厚生

次に、政府債務の厚生に対する影響を分析する。モデルには異なる家計が多数存在するため、厚生を評価することは簡単ではない。厚生の評価には様々な方法が考えられるが、本稿では、Aiyagari and McGrattan (1998) を初めとする先行研究に倣い、すべての家計を等しく評価する社会的厚生関数を用いる。

先行研究同様、政府債務の変化が厚生に与える影響を消費単位で計測する。基準となる政府債務・GDP比率は1995年から2013年の平均である 0.78 に定める。そして、政府債務・GDP比率が 0.78 からある水準 $\bar{B}^{new}$ に変化したときの厚生の変化を消費で測ったものを ω とする。つまり、政府債務・GDP比率が 0.78 と $\bar{B}^{new}$ のときで厚生が同じになるには、政府債

図1 政府債務・GDP比率とマクロ経済（ベースラインのケース）



（注1）横軸は政府債務・GDP比率。Capital, Capital+Debt, After-tax wage rate はGDP（Output）で割ったものを示している。

8) GDP、消費は一定率で成長するため、経済全体の生産性 z が1のときのものを示している。

務・GDP 比率 0.78 のときの消費がすべての家計、状態、時間で $(\omega \times 100)\%$ だけ増加する必要があることを意味する。

さらに、Flodén (2001) に倣い、政府債務が厚生に与える影響を、(平均)水準、不確実性、格差を通じた影響に分割する。すなわち、

$$\omega \approx \omega_{lev} + \omega_{unc} + \omega_{ine} \quad (9)$$

とする。ここで、 ω_{lev} は水準を通じた影響、 ω_{unc} は不確実性を通じた影響、 ω_{ine} は格差を通じた影響である。それぞれの求め方の概要は以下の通りである⁹⁾。

まず、水準を通じた影響 ω_{lev} は、代表的家計の厚生の変化を消費で計測したものである。すなわち、代表的家計を想定し、政府債務・GDP 比率が 0.78 と $\bar{B}^{new}$ で厚生が同じになるには、政府債務・GDP 比率が 0.78 のときの民間総消費がすべての期で $(\omega_{lev} \times 100)\%$ だけ増加する必要があることを意味している。

次に、格差を通じた影響 ω_{ine} は、以下のよう
に計算する「格差コスト」の変化で計測する。まず、それぞれの家計について、均衡と同じ厚生を得る certainty-equivalent な消費と余暇 (1 から労働時間を引いたもの) の水準を決める。その組み合わせは無数にあるが、本稿では、余暇は今期の最適水準に固定する。そして、各家計が certainty-equivalent な消費と余暇を得たときの厚生の和が、代表的な家計が certainty-equivalent な消費と余暇の経済全体の和を得たときの厚生と比べてどれだけ劣っているか求め、それを格差コストと定義する。すなわち、格差コストは格差が存在することによる厚生の損失である。そして、政府債務の変化による格差コストの変化を ω_{ine} とする。

最後に、不確実性を通じた影響 ω_{unc} は、「不確実性コスト」の変化で計測する。その不確実性コストは、代表的家計が certainty-equivalent な消費と余暇の経済全体の和を得たときの厚生が、代表的家計が消費と余暇の経済全体の和を得たときの厚生と比べてどれだけ劣っているか

で計測する。すなわち、不確実性コストは消費と余暇が不確実であることによる厚生の損失である。そして、政府債務の変化による不確実性コストの変化を ω_{unc} とする。

結果は図 2 と表 2 に示している。政府債務・GDP 比率が上昇すると、 ω_{unc} は単調に増加していく。すなわち、不確実性コストは減少する。これは、政府債務が増えると消費と余暇の平準化に使える資産が増えるため、家計が直面する不確実性が減少するからである。別の視点から見ると、政府債務が増えると利子率が上昇するため、資産を保有することのコストが低下し、家計の資産保有が増加、消費と余暇の平準化がより強く行われる。定量的には、政府債務が GDP の 78% から 200% まで増加すると、不確実性の減少により厚生は消費水準で測って 0.26% 改善する。

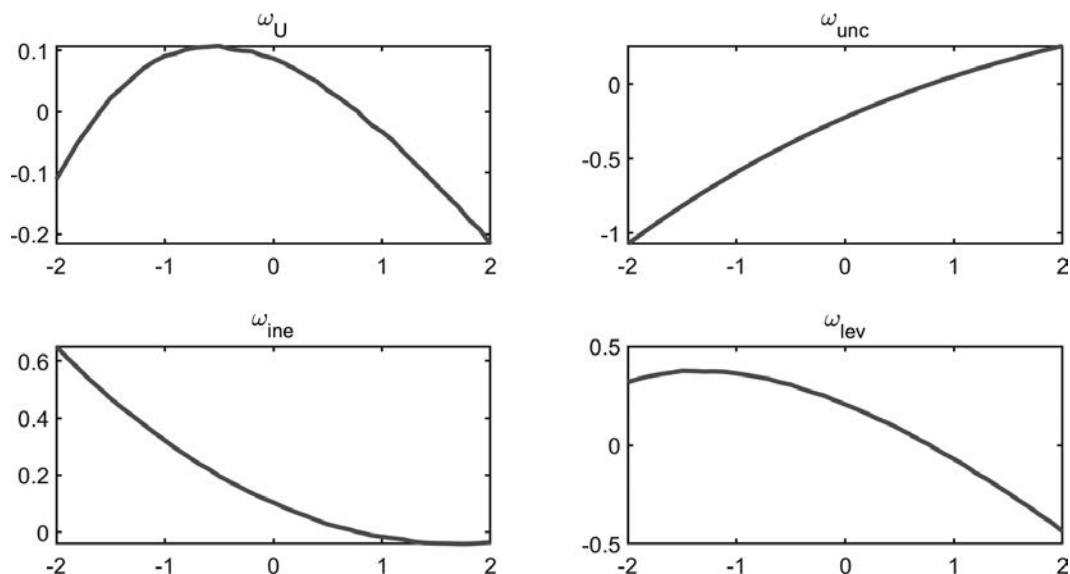
一方、政府債務・GDP 比率が上昇すると、 ω_{ine} は単調に減少する。すなわち、格差コストは悪化する。政府債務が増えると利子率が上昇するため、資産を多く持つ家計が相対的に有利になる。一方、賃金は低下するため、資産の少ない家計は悪影響を受ける。その結果、格差コストは上昇する。定量的には、政府債務が GDP の 78% から 200% まで増加すると、格差の拡大によって厚生は 0.04% 悪化する。

また、水準 ω_{lev} は、政府債務が増えると最初は上昇し、その後低下する。政府債務が GDP の 78% から 200% まで増加すると、水準の悪化により厚生は 0.44% 悪化する。

厚生全体に対する影響 ω はこれら 3 つの影響の相対的な大きさで決まるが、ベースラインのパラメータ値の下では、政府債務が増えると厚生は最初改善し、その後悪化する。最も厚生が高くなる政府債務の水準は -50% である。すなわち、政府が GDP 比で 50% の資産を持つのが最適ということになる。政府債務が GDP の 78% から 200% まで増加すると、厚生は消費で測って 0.22% 悪化する。

9) 詳細は Flodén (2001) を参照。

図2 政府債務・GDP比率と厚生（ベースラインのケース）



（注1）横軸は政府債務・GDP比率。縦軸は消費で測った厚生の変化を%で示している。

表2 厚生

	厚生最大化債務	厚生変化全体	不確実性	格差	水準
ベースライン	-50	-0.22	0.26	-0.04	-0.44
少ない所得移転	200	0.10	0.33	-0.04	-0.19
高いリスク	50	-0.12	0.36	-0.05	-0.42
高い利子率	-200	-1.16	0.36	-0.24	-1.28
消費税	-60	-0.13	0.22	-0.06	-0.29

（注1）厚生最大化債務はGDPに対する割合を、厚生変化は政府債務がGDPの78%から200%に増えた時の厚生の変化を消費で測ったものを、それぞれ%で示している。

ただし、次節で見るように、これらの影響の大きさは、労働生産性リスクや一括所得移転の

大きさに強く依存する。したがって、本節の定量的な結果の解釈には注意が必要である。

V. 結果の頑健性

V-1 パラメータ値

本節では、前節で確認した政府債務の長期的な影響がパラメータ値の変化に対してどれだけ頑健であるかを確認する。特に、一括所得移転、

労働生産性リスク、基準利子率の影響を見る。

まず、一括所得移転の大きさを変化させる。本稿のモデルにはライフサイクルの要素がないため、年金を受けている家計は存在しない。一

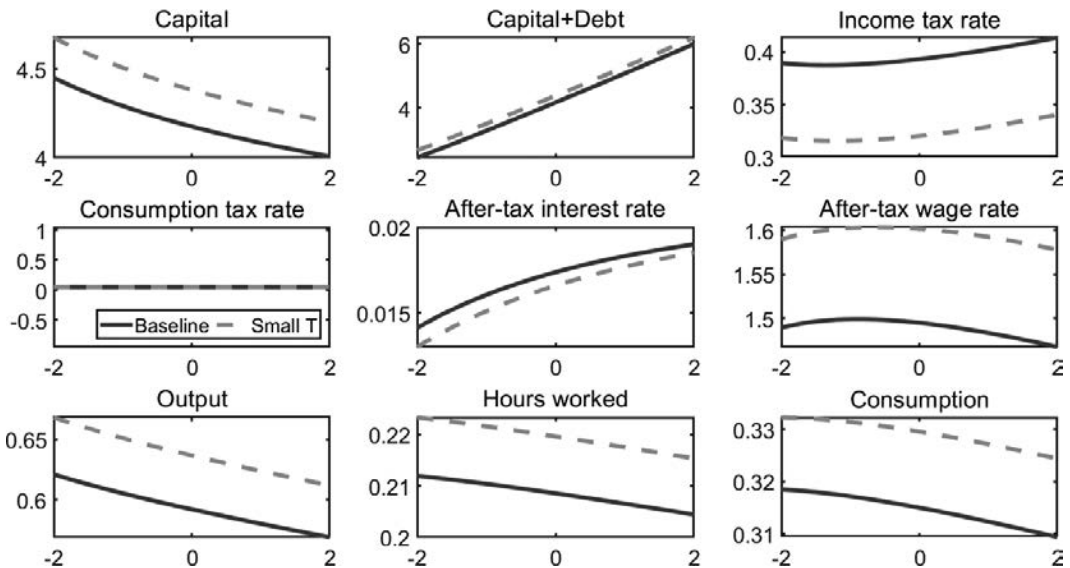
方、ベースラインの一括所得移転の水準は年金を含んだデータに合わせている。さらに、モデルではすべての家計が同じ量の所得移転を受けると仮定しているが、現実には所得移転の水準は家計毎に異なっており、ベースラインの水準以下の所得移転しか受け取っていない家計も存在する。これらのことを考慮すると、ベースラインの一括所得移転の水準は現実と比べて高過ぎる可能性もある。そこで本節では、ベースラインの水準である GDP の 14.1% ではなく、Aiyagari and McGrattan (1998), Flodén (2001) に倣い、一括所得移転の水準を米国と同じ GDP の 8.2% に設定する。他のパラメータ値はベースラインの値と同じである。

図 3 は、マクロ変数に関して、実線でベースラインの所得移転水準の結果 (Baseline) と、点線で所得移転を米国の水準まで減らした結果 (Small T) を示したものである。政府債務のマクロ変数に対する影響は、定性的には所得移転の多寡に依存しない。所得移転が少ないケースでも、政府債務・GDP 比率の上昇は資本・

GDP 比率を低下させ利子率を上昇させる一方、賃金率を低下させる。また、GDP、消費、労働時間も政府債務の増加とともに単調に減少する。所得移転の水準が影響を及ぼすのは、マクロ変数の水準である。一括所得移転が減少すると家計は貯蓄を増やすため、資本・GDP 比率は上昇、利子率は低下する。また、所得移転が減少すると、GDP、労働時間、消費も増加する。所得移転が減るため、所得税率は低下する。

図 4 は、所得移転の水準と政府債務・GDP 比率が厚生に与える影響の関係を示したものである。所得移転の量が変化しても、政府債務の不確実性、格差、水準を通じた厚生効果は定性的には変わらない。しかし、定量的には、所得移転の減少は水準低下による厚生の悪化を緩和し、不確実性コスト減少による厚生の改善効果を強める。一方、格差を通じた厚生効果はほぼ変わらない。その結果、所得移転が少ない場合、最適な政府債務水準は分析している上限である GDP の 200% となる。そして、政府債務が GDP の 78% から 200% まで増加すると、全体

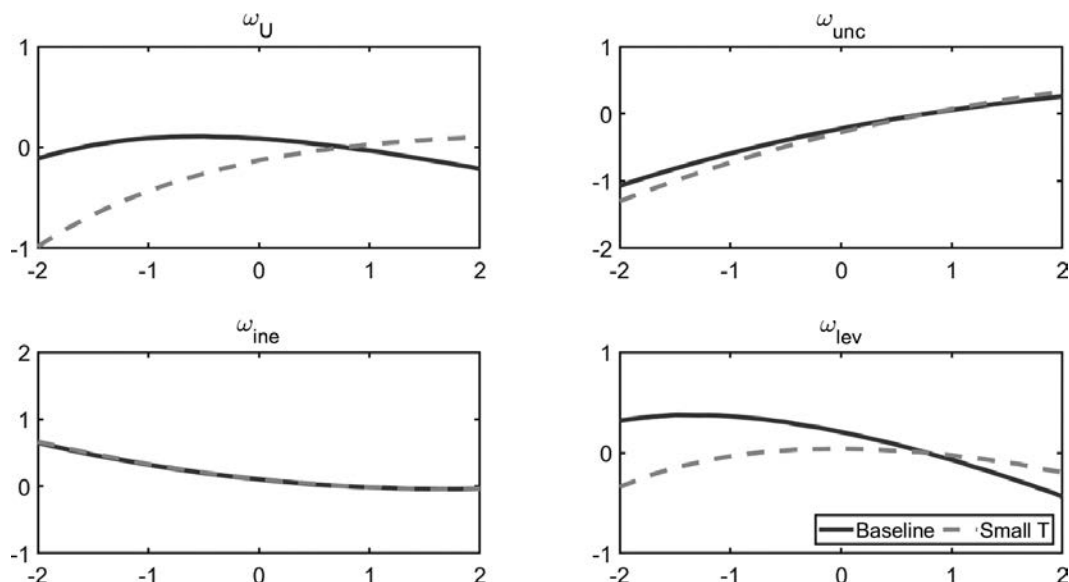
図 3 政府債務・GDP 比率とマクロ経済 (所得移転の影響)



(注 1) 横軸は政府債務・GDP 比率。Capital, Capital+Debt, After-tax wage rate は GDP (Output) で割ったものを示している。

(注 2) Baseline: ベースラインのケース。Small T: 所得移転が小さいケース。

図4 政府債務・GDP比率と厚生（所得移転の影響）



(注1) 横軸は政府債務・GDP比率。縦軸は消費で測った厚生の変化を%で示している。

(注2) Baseline：ベースラインのケース。Small T：所得移転が小さいケース。

の厚生は0.10%改善する。

次に、労働生産性（賃金）リスクを変化させる。ベースラインの分析では、日本の賃金分布を参考にしているものの、やや恣意的な方法で賃金リスクのパラメータ値を設定した。そこでここでは、政府債務の影響が労働生産性リスクの大きさに依存するのか分析を行う。具体的には、労働生産性リスクである一時的な労働生産性ショックの標準偏差 σ_e を0.1754から0.21に増加させる。この0.21という値はFlodén（2001）で用いられている米国の値である。

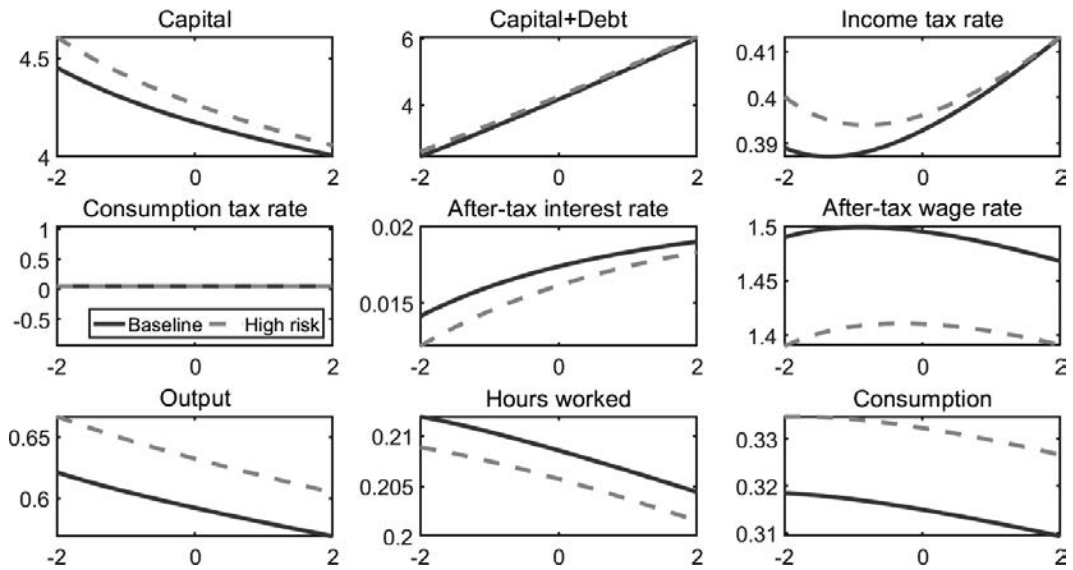
図5は、実線でベースライン（Baseline）の結果と、点線でリスクが高いケース（High risk）の結果を示したものである。政府債務のマクロ変数に対する定性的な影響は、リスクの水準に依存しない。リスクが高いケースでも、政府債務の増加は、資本蓄積を阻害し、利子率を上昇させる。また、GDP、消費、労働時間は政府債務の増加とともに単調に減少する。労働生産性リスクの大きさが影響を及ぼすのは、マクロ変数の水準である。労働生産性リスクが

高まると家計は貯蓄を増やすため、資本・GDP比率は上昇し、税引き後利子率は低下する。GDP、消費は増加するが、労働時間は減少する。

図6は、労働生産性リスクの水準と政府債務・GDP比率が厚生に与える影響の関係を示したものである。政府債務・GDP比率が、不確実性、格差、水準の変化を通じて厚生に与える影響は、定性的には労働生産性リスクの水準に影響を受けない。政府債務の増加は、家計が直面する不確実性を減少させ厚生を改善する。一方、格差を拡大させ厚生を悪化させる。水準は、最初改善するが、その後悪化する。定量的には、労働生産性リスクの上昇は政府債務の不確実性減少効果を大きくするが、格差や水準を通じた効果にはあまり影響を与えない。その結果、最適な政府債務水準はベースラインケースよりも上昇し、GDPの50%となる。また、政府債務がGDPの78%から200%まで増加した場合の厚生損失は0.10%と、ベースラインケースの0.22%から減少する。

最後に、基準利子率を変える。ベースライン

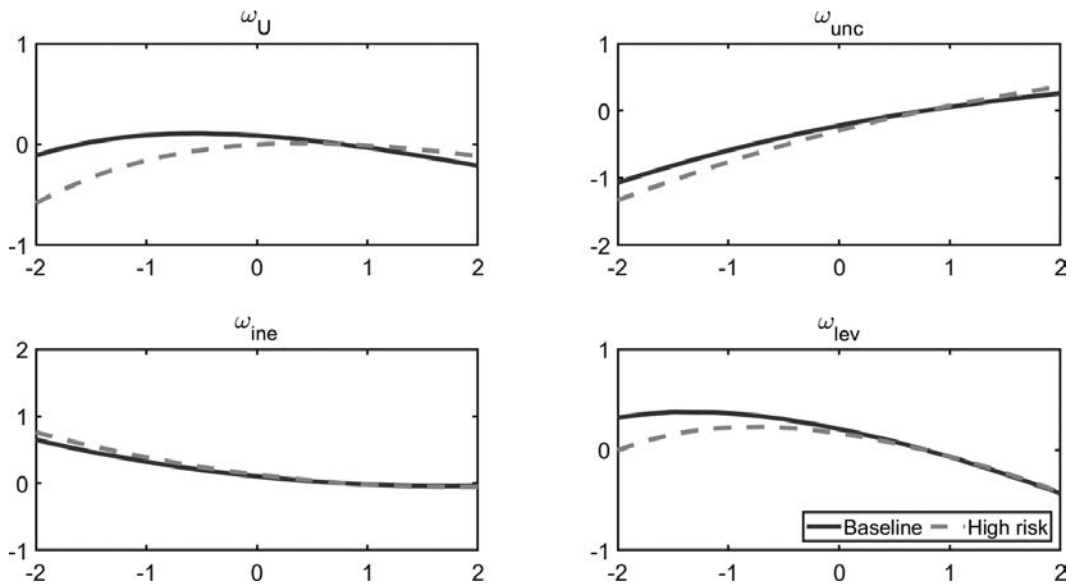
図5 政府債務・GDP 比率とマクロ経済（リスクの影響）



(注1) 横軸は政府債務・GDP 比率。Capital, Capital+Debt, After-tax wage rate は GDP (Output) で割ったものを示している。

(注2) Baseline : ベースラインのケース。High risk : 労働所得リスクが高いケース。

図6 政府債務・GDP 比率と厚生（リスクの影響）



(注1) 横軸は政府債務・GDP 比率。縦軸は消費で測った厚生の変化を%で示している。

(注2) Baseline : ベースラインのケース。High risk : 労働所得リスクが高いケース。

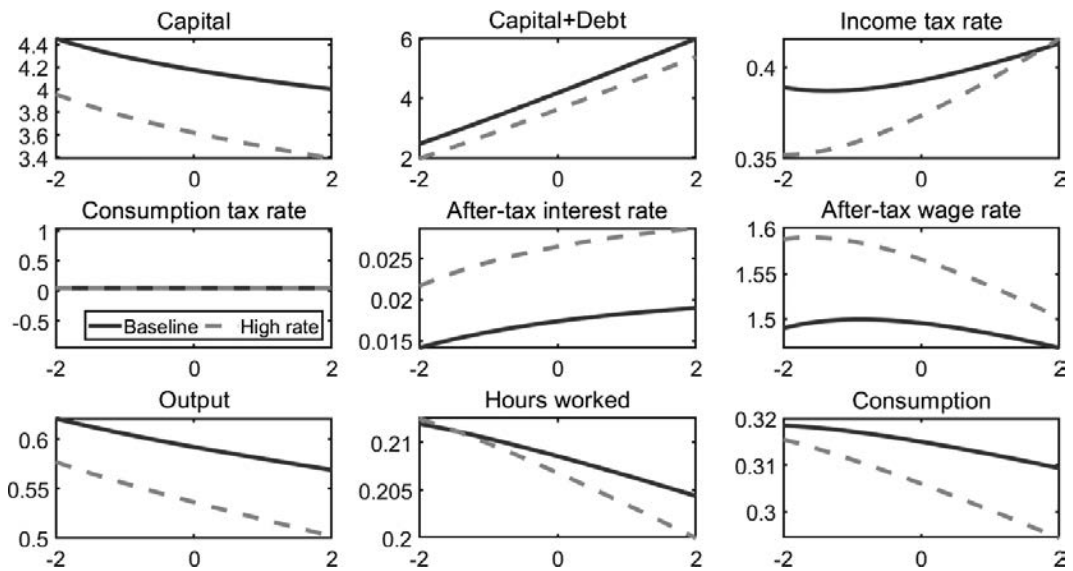
の分析では、税引き後の利子率を国債の金利に合わせていた。これには問題がないとは言えない。モデルでは資本と政府債務が同じリターンを生むと仮定しているが、現実には資本の方が政府債務よりリターンが通常は高い。したがって、ベースラインの分析は、低すぎる基準利子率を想定している可能性が高い。そこでここでは、ベースラインの分析よりも高い基準利子率を考える。具体的には、Aiyagari and McGrattan (1998), Flodén (2001) に倣い、基準となる政府債務・GDP水準において、税引き前利子率が4.5%となるように割引因子を調整する¹⁰⁾。他のパラメータ値はベースラインの分析と同じである。

図7は、実線でベースラインのケース（Baseline）の結果を、点線で基準利子率が高いケース（High rate）の結果を示している。政府債務のマクロ経済に対する影響は、定性的には利子率の水準に依存しない。基準利子率が高いケースでも、政府債務の増加は資本蓄積を減少し、利子率を上昇させる。また、GDP、

消費、労働時間はすべて政府債務の増加とともに単調に減少する。基準利子率の高低が影響を及ぼすのは、マクロ経済変数の水準である。基準利子率が高いケースでは、資本・GDP比率は低くなり、GDP、労働時間、消費は小さくなる。

図8は、基準利子率の高低と政府債務・GDP比率が厚生に与える影響の関連を示している。政府債務が不確実性、格差、水準の変化を通じて厚生に与える影響は、定性的には基準利子率の水準に依存しない。定量的には、基準利子率の上昇は水準と格差の悪化による厚生損失を大きく増やすが、不確実性の減少による厚生の改善効果はそれほど大きくならない。その結果、最適な政府債務水準は分析している下限のGDP比-200%となる。また、政府債務がGDPの78%から200%まで増加するときの厚生損失は1.16%となり、ベースラインの0.22%から大きく増加する。

図7 政府債務・GDP比率とマクロ経済（基準利子率の影響）

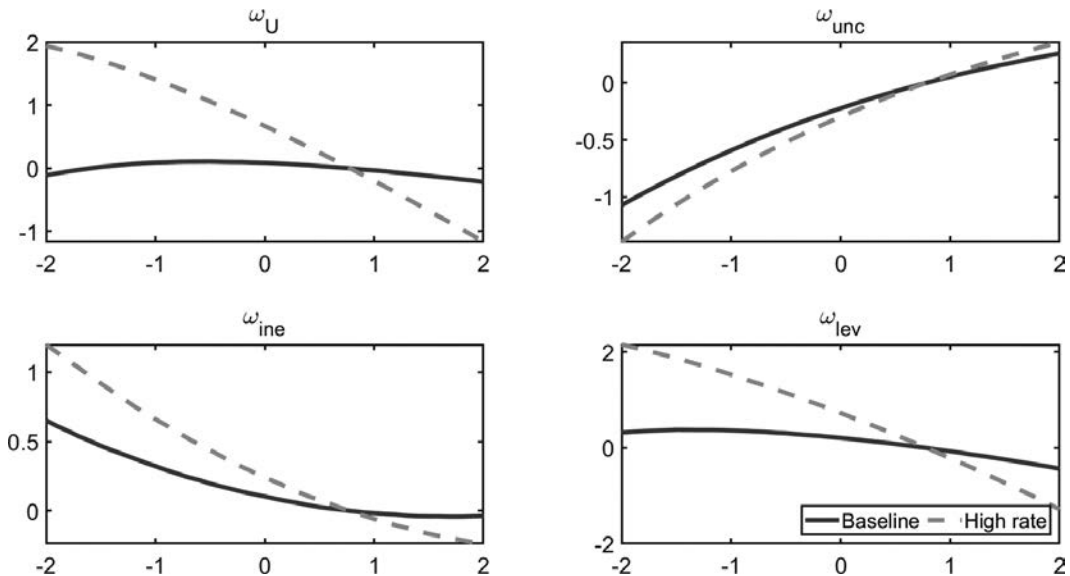


(注1) 横軸は政府債務・GDP比率。Capital, Capital+Debt, After-tax wage rateはGDP (Output)で割ったものを示している。

(注2) Baseline: ベースラインのケース。High rate: 基準利子率が高いケース。

10) ベースラインの分析では、基準となる債務・GDP比率において、税引き前利子率は3.02%である。

図8 政府債務・GDP 比率と厚生（基準利率の影響）



(注1) 横軸は政府債務・GDP 比率。縦軸は消費で測った厚生の変化を%で示している。

(注2) Baseline：ベースラインのケース。High rate：基準利率が高いケース。

V-2. 消費税による調整

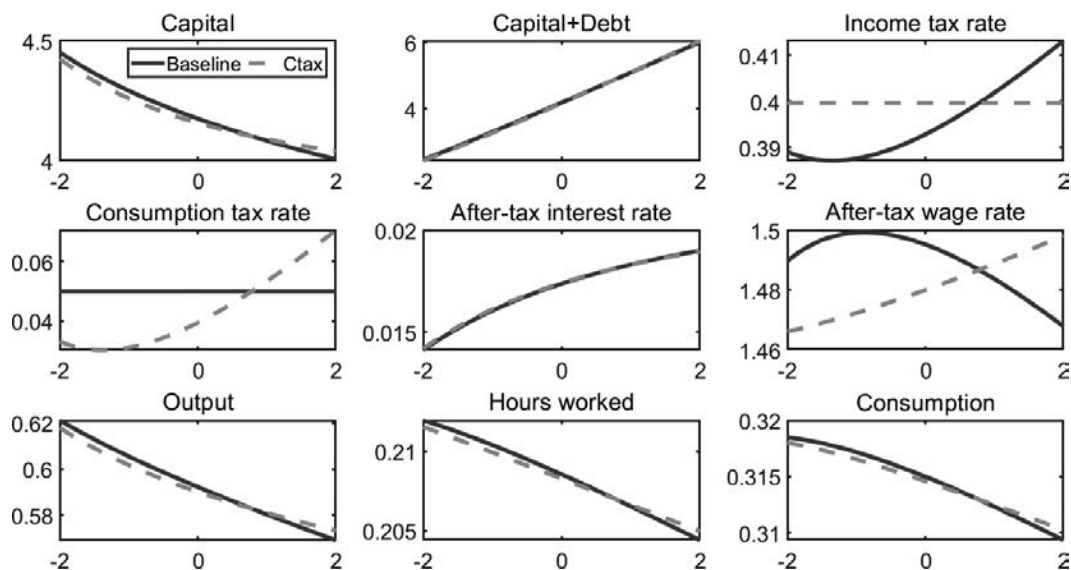
これまででは、政府債務の変化によって起こる政府予算の変化を所得税率（資本所得および労働所得税率）によって調整し、消費税率は一定としてきた。一方、日本では消費税に関する議論が近年盛んになっている。そこで本節では、政府債務の変化によって起こる政府予算の変化を消費税率で調整し、所得税率は一定であるとして分析を行う。他のパラメータ値は第IV節のものと同一である。

マクロ経済に対する影響は図9にまとめている。実線（Baseline）で所得税率により政府予算を調整したベースラインの結果、点線（Ctax）で消費税による調整の結果を示している。多くの変数については、政府債務の影響は2つのケースで定性的には変わらないが、税率と税引き後の賃金率に違いが見られる。消費税で調整するケースでは、当然、所得税率は一定となる。消費税率は、政府債務を減らすと最初は減少するが、さらに政府債務が減り政府資産が増えていくと、消費税率が上昇していく。

その理由は、所得税率で調整したケースと同様に、政府資産が増えると利率が低下し、政府の資産収入が減少、その結果、政府予算制約を満たすために消費税率の上昇が必要となるからである。定量的には、消費税率調整の方が、政府債務増加によるGDPや消費の減少を抑える。例えば、政府債務がGDPの78%から200%まで増加すると、消費税率による調整の場合はGDPが0.583から0.573と1.67%減少するが、これは所得税率で調整する場合の2.35%減少よりも小さい。

厚生の結果は、図10で比較している。政府債務が厚生に与える定性的な影響は、消費税率での調整も所得税率での調整も変わらない。政府債務・GDP比率が上昇すると、厚生は最初改善するが、さらに債務比率が上がると悪化する。水準に対する影響も同様である。また、政府債務の増加は不確実性を減少させることで厚生を改善するが、格差を広げることで厚生を悪化させる。定量的には、政府債務がGDPの78%から200%まで増加したときの厚生の悪化

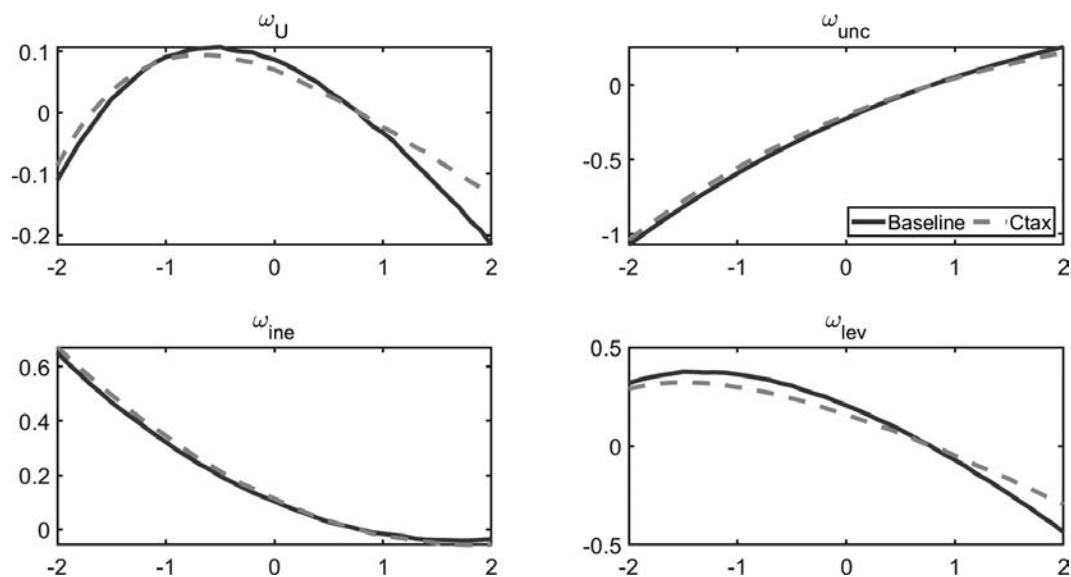
図9 政府債務・GDP比率とマクロ経済（所得税と消費税の比較）



(注1) 横軸は政府債務・GDP比率。Capital, Capital + Debt, After-tax wage rate はGDP (Output) で割ったものを示している。

(注2) Baseline : ベースラインのケース。Ctax : 消費税のケース。

図10 政府債務・GDP比率と厚生（所得税と消費税の比較）



(注1) 横軸は政府債務・GDP比率。縦軸は消費で測った厚生の変化を%で示している。

(注2) Baseline : ベースラインのケース。Ctax : 消費税のケース。

は、消費税率で調整した場合は0.13%であり、所得税率で調整した場合の0.22%より小さくなる。所得税率による調整と比して消費税率による調整が厚生悪化を抑える主な理由は、水準

低下による厚生悪化が抑えられるからである。一方、消費税率による調整は不確実性減少による厚生改善効果を弱め、格差拡大による厚生悪化を大きくする。

VI. 結論

本稿では、家計の異質性を考慮した動学一般均衡モデルに基づき、政府債務がマクロ経済と厚生に与える影響を整理した。長期的な政府債務・GDP比率が上昇すると、資本・GDP比率が低下し、利子率、税率は上昇する¹¹⁾。標準的な方法で厚生を評価すると、政府債務水準の上昇は不確実性を減らし厚生を改善する一方、格差を拡大し厚生を悪化させる。重要なことに、これらの影響の大きさは所得移転や労働生産性リスクの大きさに依存する。したがって、政府債務がマクロ経済や厚生に与える影響を定量的に評価する上でも、ミクロレベルのデータを用いて家計の状況を把握することが不可欠である。

最後に、本稿で示した結果を解釈する際の注意点と今後の研究の方向性について議論する。第一に、本稿では政府債務水準が異なる均斉成長経路の比較をしており、それらの間の移行過程を分析していない。したがって、例えば、現状から政府債務・GDP比率を引き上げたときに経済がどのように変化していくか、それは厚生観点から望ましいかという問題には答えていない¹²⁾。第二に、本稿のモデルは資産や労働所得の格差を考慮しているが、年齢の違いを捨象している。一方、既存研究によると、消費、資産保有、労働供給は年齢の影響を大きく受け

る。また、労働生産性（賃金）リスクも年齢で異なることが知られている。したがって、家計間の年齢の違いを考慮したライフサイクルモデルを用いた分析も望まれる¹³⁾。第三に、本稿では先行研究で使われている標準的な厚生評価の方法を用いた。しかし、異なる家計が存在する経済における厚生評価は様々な方法が考えられるため、他の厚生評価方法を用いた分析も行われるべきである。第四に、本稿では政府債務の影響のうち一部しか考慮していない。例えば、Elemendorf and Mankiw (1999) で挙げられている政府債務増加がもたらす政治経済学的な影響については分析を行っていない。政府債務がマクロ経済および厚生に与える影響は慎重に評価されるべきであり、今後も様々な研究が行われることを期待したい。

11) 先に見たように、政府が正の資産を保有する場合、債務の増加（資産の減少）は税率を低下させることもある。

12) そのような移行過程の分析は本質的に難しい。例えば、政府債務を増やす場合、どのようなペースで増やしていくのかも考慮する必要がある。

13) 本特集号に含まれる猪野・小林 (2021) は移行過程とライフサイクルを考慮した政府債務に関わる研究をレビューしている。

参 考 文 献

- 猪野明生・小林慶一郎（2021）「不完備市場および世代重複構造のある経済における最適債務」『フィナンシャル・レビュー』, 146号, pp. 5-20
- Aiyagari, R. and McGrattan, E. (1998), “The Optimum Quantity of Debt”, *Journal of Monetary Economics*, Vol. 42 No. 3, pp. 447-469
- Alonso-Ortiz, J. and Rogerson, R. (2010), “Taxes, Transfers and Employment in an Incomplete Markets Model”, *Journal of Monetary Economics*, Vol. 57 No. 8, pp. 949-958
- Arai, R. and Ueda, J. (2013), “A Numerical Evaluation of the Sustainable Size of the Primary Deficit in Japan”, *Journal of the Japanese and International Economies*, Vol. 30 No. X, pp. 59-75
- Braun, A. and Joines D. (2015), “The Implications of a Graying Japan for Government Policy”, *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 57 No. X, pp. 1-23
- Broda, C. and Weinstein, D.E. (2005), “Happy News from the Dismal Science: Reassessing Japanese Fiscal Policy and Sustainability”, *Reviving Japan's Economy*, pp. 40-78
- Doi, T., Hoshi, T. and Okimoto, T. (2011), “Japanese Government Debt and Sustainability of Fiscal Policy”, *Journal of the Japanese and International Economies*, Vol. 25 No. 4, pp. 414-433
- Elmendorf, D. and Mankiw, G. (1999), “Government Debt”, *Handbook of Macroeconomics*, Vol. 1 No. C, pp. 1615-1669
- Fève, P., Matheron, J., and Sahuc, J-G. (2018), “The Horizontally S-Shaped Laffer Curve”, *Journal of the European Economic Association*, Vol. 16 No. 3, pp. 857-893
- Flodén, M. (2001), “The Effectiveness of Government Debt and Transfers as Insurance”, *Journal of Monetary Economics*, Vol. 48 No. 1, pp. 81-108
- Flodén, M. and Lindé, J. (2001), “Idiosyncratic Risk in the United States and Sweden: Is There a Role for Government Insurance?”, *Review of Economic Dynamics*, Vol. 4 No. 2, pp. 406-437
- Hansen, G. and İmrohoroglu, S. (2016), “Fiscal Reform and Government Debt in Japan: A Neoclassical Perspective”, *Review of Economic Dynamics*, Vol. 21, pp. 201-224
- Hayashi, F. and Prescott, E. (2002), “The 1990s in Japan: A Lost Decade”, *Review of Economic Dynamics*, Vol. 5 No. 1, pp. 206-235
- Hoshi, T. and Ito, T. (2014), “Defying Gravity: Can Japanese Sovereign Debt Continue to Increase without a Crisis”, *Economic Policy*, Vol. 29, pp. 5-44
- İmrohoroglu, S., Kitao, S., and Yamada, T. (2016), “Achieving Fiscal Balance in Japan”, *International Economic Review*, Vol. 57 No. 1, pp. 117-154
- İmrohoroglu, S. and Sudo, N. (2011a), “Productivity and Fiscal Policy in Japan: Short-term Forecasts from the Standard Growth Model”, *Monetary and Economic Studies*, 29, pp. 73-106
- İmrohoroglu, S. and Sudo, N. (2011b), “Will a Growth Miracle Reduce Debt in Japan”, *IMES Discussion Paper Series E-1*
- Kitao, S. (2015), “Fiscal Cost of Demographic Transition in Japan”, *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 54 No. X, pp. 37-58
- Lise, J., Sudo, N., Suzuki, M., Yamada, K., and

- Yamada, T. (2014), “Wage, Income and Consumption Inequality in Japan, 1981-2008: From Bottom to Lost Decades”, *Review of Economic Dynamics*, Vol. 17 No. 4, pp. 582-612
- Nakajima, T. and Takahashi, S. (2017), “The Optimum Quantity of Debt for Japan”, *Journal of the Japanese and International Economies*, Vol. 46, pp. 17-26
- Nakajima, T. and Takahashi, S. (2020), “The Effectiveness of Consumption Taxes and Transfers as Insurance against Idiosyncratic Risk”, *Journal of Money, Credit, and Banking*, Vol. 52 No. 2-3, pp. 505-530
- Nutahara, K. (2015), “Laffer Curves in Japan”, *Journal of the Japanese and International Economies*, Vol. 36 No. 1, pp. 56-72
- Sugo, T. and Ueda, K. (2008), “Estimating a Dynamic Stochastic General Equilibrium Model for Japan”, *Journal of the Japanese and International Economies*, Vol. 22 No. 4, pp. 476-502
- Tauchen, G. (1986), “Finite State Markov-Chain Approximations to Univariate and Vector Autoregressions”, *Economics Letters*, Vol. 20 No. 2, pp. 177-181
- Zhu, S. (2020), “Existence of the Stationary Equilibrium in an Incomplete-Market Model with Endogenous Labor Supply”, *International Economic Review*, Vol. 61 No. 3, pp. 1115-1138

補論 1：モデルの詳細

ここでは、第Ⅱ節で導入したモデルの詳細を示す。本稿では産出量 Y や資本 K などが一定率 g で成長する均斉成長経路に注目するため、チルダ付きの変数で産出量に対する割合を示す（例： $\tilde{K} = K/Y$ ）。

補論 1－Ⅰ 企業

利潤最大化の一階条件は、(3) (4) 式を産出量 Y で割ることによって、

$$r = \frac{\theta}{\tilde{K}} - \delta \quad (10)$$

$$\tilde{w} = \frac{1-\theta}{N} \quad (11)$$

となる。

補論 1－Ⅱ 家計

経済が第 0 期から均斉成長経路上にあるとする。第 0 期の産出量を Y_0 とすると、第 t 期の産出量 Y_t は $Y_0 (1+g)^t$ 、各家計の消費 c_t は c_t

$= c_t Y_0 (1+g)^t$ となる。したがって、家計の目的関数 (6) 式は、 $\mu \neq 1$, $\mu > 0$ のとき、

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, h_t) = Y_0^{1-\mu} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (1+g)^{t(1-\mu)} u(\tilde{c}_t, \tilde{h}_t) \quad (12)$$

となる。このことから、家計の効用最大化問題は、

$$\begin{aligned} & V(\tilde{a}, e, x) \max_{c, a', h} \{u(\tilde{c}, \tilde{h}) \\ & + \beta(1+g)^{1-\mu} E[V(\tilde{a}', e', x)|e]\} \\ & \text{subject to } (1+\tau_c)\tilde{c} + (1+g)\tilde{a}' \\ & \leq [1 + (1-\tau)r]\tilde{a} + (1-\tau)\tilde{w}xeh + \tilde{T} \\ & \tilde{c} \geq 0, h \in [0, 1], \tilde{a}' \geq 0 \end{aligned} \quad (13)$$

と表すことができる。ここで、 $V(\tilde{a}, e, x)$ は家計の価値関数、 E は条件付き期待値を表す。最初の制約式は家計の予算制約式である。また、消費、資産保有には非負制約があり、労働時間は 0 から 1 の間の値を取る必要がある。

補論 1－Ⅲ 政府

政府の予算制約式である (8) 式を産出量 Y で割ると、

$$\tilde{G} + \tilde{T} + r\tilde{B} = (1+g)\tilde{B}' - \tilde{B} + \tau[\tilde{w}N + r(\tilde{K} + \tilde{B})] + \tau_c\tilde{C} \quad (14)$$

となる。さらに、本稿で焦点を当てる均斉成長経路では $\tilde{B} = \tilde{B}'$ が成立し、(14) 式は、

$$\tilde{G} + \tilde{T} + (r-g)\tilde{B} = \tau[\tilde{w}N + r(\tilde{K} + \tilde{B})] + \tau_c\tilde{C} \quad (15)$$

となる。

補論 1－Ⅳ 均衡

均斉成長経路における、資産 $\tilde{a}$ 、一時的な生産性 e 、永続的な生産性 x に関する家計の定常分布を $\Gamma(\tilde{a}, e, x)$ とする。政策変数 $(\tilde{G}, \tilde{T}, \tilde{B}, \tau_c, \tau)$ を所与として、均斉成長経路上の均衡は以下の条件を満たす

$$(\tilde{w}, r, V, \tilde{c}, \tilde{a}', h, \tilde{K}, N, \tilde{C}, \Gamma) \quad (16)$$

である。

1. 家計の最適化

家計の価値関数 $V(\tilde{a}, e, x)$ は (13) 式を満たし、 $\tilde{c}(\tilde{a}, e, x)$ 、 $\tilde{a}'(\tilde{a}, e, x)$ 、 $\tilde{h}(\tilde{a}, e, x)$ は、消費、資産保有、労働時間の政策関数である。

2. 企業の最適化

代表的企業は、(10) (11)式を満たすように、資本 $\tilde{K}$ と労働 N を選択する。

3. 労働市場均衡

$$N = \int x h(\tilde{a}, e, x) d\Gamma \quad (17)$$

4. 資産市場均衡

$$\tilde{K}' + \tilde{B}' = \int \tilde{a}'(\tilde{a}, e, x) d\Gamma \quad (18)$$

5. 財市場均衡

$$\tilde{C} + \tilde{G} + (g + \delta)\tilde{K} = 1, \quad \tilde{C} = \int \tilde{c}(\tilde{a}, e, x) d\Gamma \quad (19)$$

6. 政府予算制約

政府の予算制約は (15)式のように満たされる。

7. 家計分布

家計の資産政策関数 $\tilde{a}'(\tilde{a}, e, x)$ 、と一時的な生産性 e の遷移過程が家計の定常分布 $\Gamma(\tilde{a}, e, x)$ を決定する。具体的には、すべての $D \subseteq [0, \bar{a}]$ に対して、

$$\Gamma(D, e', x) = \int_{\{(\tilde{a}, e, x) | \tilde{a}'(\tilde{a}, e, x) \in D\}} \pi_e(e' | e) d\Gamma \quad (20)$$

が成立する。ここで、 $\bar{a}$ は資産の上限、 $\pi_e(e' | e)$ は e の遷移確率である。

補論 2：数値計算

均衡の計算方法は以下の通りである。

(1) 家計の状態変数 $(\tilde{a}, e, x)$ を離散化する。

資産 $\tilde{a}$ に関しては、0 から 60 の間の 20 個の値を設定する。一時的な労働生産性 e については、Tauchen (1986) の方法を用いて、 $\left[-\frac{3\sigma_e}{\sqrt{1-\rho^2}}, \frac{3\sigma_e}{\sqrt{1-\rho^2}} \right]$ の間で 17 個の値を設定し、遷移確率を計算する。永続的な労働生産性 x については、 $\ln x \sim N(0, \sigma_x^2)$ を 7 個の値を用いて離散化する。

(2) 均衡における税引き後利子率 $(1-\tau)r$ と総労働 N を推測する。資本・GDP 比率 $\tilde{K}$ 、賃金率・GDP 比率 $\tilde{w}$ を (10) (11) 式より求める。所得税率 τ は、政府の予算制

約式 (15) 式から求める。民間消費・GDP 比率 $\tilde{C}$ は、財市場の均衡条件 (19) 式から求める。

(3) 所得税率、税引き後利子率、賃金率・GDP 比率 $(\tau, (1-\tau)r, \tilde{w})$ を所与として家計の最適化問題を解き、家計の価値関数 $V(\tilde{a}, e, x)$ を求める。

(a) 家計の価値関数の最初の推測 $V^0(\tilde{a}, e, x)$ を設定する。

(b) 家計の消費 $\tilde{c}(\tilde{a}, e, x)$ 、資産保有 $\tilde{a}'(\tilde{a}, e, x)$ 、労働時間 $h(\tilde{a}, e, x)$ の選択を解く。条件付き期待値は、cubic spline interpolation を用いて計算する。

(c) もし新しく求めた価値関数 $V(\tilde{a}, e, x)$

が $V^0(\bar{a}, e, x)$ と十分近ければ、次のステップに進む。そうでなければ、 $V^0(\bar{a}, e, x) = V(\bar{a}, e, x)$ と価値関数の推測を更新し、ステップ (b) に戻る。

(4) 家計の定常分布 $\Gamma(\bar{a}, e, x)$ を求める。

(a) 家計の分布を計算するため、資産保有 $\bar{a}$ に関して、0 から 60 の間の 600 個の値を設定する。家計の労働生産性 e および x については、ステップ (1) で設定した値を用いる。

(b) ステップ (3)(a) で求めた $V(\bar{a}, e, x)$ を用いて、家計の消費 $c(\bar{a}, e, x)$ 、労働時間 $h(\bar{a}, e, x)$ 、資産保有 $\bar{a}'(\bar{a}, e, x)$ を $600 \times 17 \times 7$ の $(\bar{a}, e, x)$ の組について求める。

(c) $\bar{a}_m, \bar{a}_{m+1}$ を 2 つの連続する資産の値

とする。もし $\bar{a}_m \leq \bar{a}'(\bar{a}, e, x) \leq \bar{a}_{m+1}$ ならば、 $\eta = \frac{\bar{a}_{m+1} - \bar{a}'}{\bar{a}_{m+1} - \bar{a}_m}$ とする。そして、状態変数が $(\bar{a}, e, x)$ である家計は、確率 $\eta \pi_e(e' | e)$ で $(\bar{a}_m, e', x)$ に移り、確率 $(1 - \eta) \pi_e(e' | e)$ で $(\bar{a}_{m+1}, e', x)$ に移るものとする。この更新を繰り返し収束した分布が定常分布 $\Gamma(\bar{a}, e, x)$ となる。

(5) 労働市場と資産市場の均衡条件である (17) (18) 式が満たされているか確認する。もしこれらの条件が満たされているならば、計算を終了する。そうでなければ、均衡における税引き後利子率 $(1 - \tau)r$ と総労働 N の推測を更新し、ステップ (2) から (5) を繰り返す。

補論 3：厚生評価

本稿では、Aiyagari and McGrattan (1998) を初めとする先行研究に倣い、すべての家計を等しく評価する社会的厚生関数を用いる。すなわち、厚生は、

$$U = Y_0^{1-\mu} \int V(\bar{a}, e, x) d\Gamma \quad (21)$$

で計測する。ここで、 Y_0 は基準となる GDP の水準で経済全体の生産性 z を 1 として計算する¹⁴⁾。

第 0 期から均斉成長経路にいるとすると、状態変数が $(\bar{a}, e, x)$ である家計の期待効用は、 $\mu > 0, \mu \neq 1$ のとき、

$$\begin{aligned} & E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, h_t) \\ &= Y_0^{1-\mu} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(\bar{c}_t, \bar{h}_t) = Y_0^{1-\mu} V(\bar{a}, e, x) \end{aligned} \quad (22)$$

となる。したがって、厚生 U は、

$$\begin{aligned} U &= Y_0^{1-\mu} \int V(\bar{a}, e, x) \Gamma \\ &= \int E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, h_t) \Gamma \end{aligned} \quad (23)$$

と表すことができる。

政府債務・GDP 比率が基準値からある水準 $\bar{B}^{new}$ に変化したときの厚生の変化を消費で測ったものを ω とする。政府債務・GDP 比率が基準値、 $\bar{B}^{new}$ のときの厚生をそれぞれ U, U^{new} とすると、

$$U^{new} = (1 + \omega)^{1-\mu} U \quad (24)$$

が成立する。したがって、

$$w = \left(\frac{U^{new}}{U} \right)^{\frac{1}{1-\mu}} - 1 \quad (25)$$

となる。

14) 具体的には、 $Y_0 = \bar{K}^{\frac{\theta}{1-\theta}} N$ である。