〈財務省財務総合政策研究所「フィナンシャル・レビュー」令和３年第３号（通巻第146号）2021年６月〉

不完備市場および世代重複構造のある経済における最適債務[*1]

猪野　明生[*2]
小林　慶一郎[*3]

要　　約

Aiyagari and McGrattan（1998）は，不完備市場において，政府債務が家計の貯蓄手段となることで消費の平準化を手助けし，社会厚生を改善する可能性があることを指摘した。AMは一定量の政府債務を発行することが最適であるとした。同様の分析が，Nakajima and Takahashi（2017）により日本について行われている。AMのモデルでは無限期間生きる個人が仮定されていたが，Peterman and Sager（2018）により有限期間生きる個人を仮定した場合には貯蓄需要が無限期間生きる個人の場合より減少し，最適な政府債務はマイナスの値になるとの指摘がなされている。また，AMの議論では定常状態間の比較のみを行っており，債務量が変化する移行期間のコストが見落とされている。本論文ではこれらの点について既存文献のレビューを行う。

キーワード：政府債務，不完備市場，世代重複構造，移行経路
JEL Classification：H6, E21, E6

Ⅰ．はじめに

本稿では政府の発行する債券である国債の最適な量について，個々人が保険市場の存在しないショックに晒されており，その結果として過剰貯蓄が生じる不完備市場モデルを使った分析についてレビューを行う。本誌で同じようなレビューを行ったものとして髙橋（2021）があるが，そこでは主に無限期間生きる個人の登場する不完備市場モデルにおける定常状態の均衡分析について解説を行っている。本稿では（1）有限期間生きる個人のモデルと（2）移行経路の分析の二点に重きを置いて解説を行う。

Aiyagari and McGrattan（1998）（以下AM）では個々人が保険市場によってカバーできないようなショックに直面している場合，自己保険のために生じる過剰貯蓄の存在により，政府債務がその貯蓄手段を提供することで社会的厚生を改善できる可能性を指摘した。その後，Floden（2001）により政務債務のみならず所

＊1　フィナンシャル・レビュー「国の債務と債務管理に関する分析」の研究会において，阿曽沼多聞，小枝淳子，吉野直行の諸先生方には，有意義なコメントをいただいた。ここに謝意を示す。
＊2　横浜国立大学大学院国際社会科学研究院専任講師
＊3　東京財団政策研究所研究主幹

得移転も政策として追加した場合の分析が行われている。また Nakajima and Takahashi（2017）では AM の分析を日本に応用し，米国の場合と異なり個々人の直面しているリスクが小さい日本においては政府が債務を保有することを最適な政策として位置付けることができない可能性を指摘している。

Peterman and Sager（2018）では世代重複構造を不完備市場モデルに導入することで，政府が負債ではなく貯蓄を行うことが最適な政策であるという AM の結論とは異なる結果を得ている。

ここまで挙げた文献は全て異なる政府負債の水準の元での定常均衡の比較を行っている。しかしながら，例えば対 GDP 比で 200％を超える政府負債比率から 60％へと低下させる場合，定常均衡だけで比較すれば前者のほうが政府負債の利払いに必要なため税率が高くなるが，前者から後者へと移行することを考えた場合，政府債務削減のために短期的には税率を高くする必要がある。そのため，政府債務と税率が両方高い定常均衡と両方低い定常均衡を比較するだけでは短期的な財政再建のコストを見逃してしまう。Röhrs and Winter（2017）では不完備市場モデルにおける移行経路の分析を行うことでこの点についての問題を解決している。また，Ino and Kobayashi（2020）では政府債務削減のために消費増税を早期に行うか，それとも先送りするかについて移行経路を考慮に含めた分析を行っている。

既存研究の位置づけを理解するために，「無限期間生きる個人のモデル／有限期間生きる個人のモデル」および「定常状態のみの分析／移行経路も考慮に入れた分析」という 2 つの軸で 4 つの象限に分類すると，表 1 及び表 2 のようにあらわすことができる。

本稿では，まず 2 章で基本的なモデルである AM について解説を行った後，3 章では世代重複構造を導入した Peterman and Sager（2018）を紹介する。4・5 章では移行経路を取り扱った分析として Röhrs and Winter（2017）と Ino and Kobayashi（2020）についてレビューを行い，6 章では結論を述べる。

Ⅱ．不完備市場モデルにおける政府負債：無限期間生きる個人での定常状態の比較

AM は，個々人の労働生産性に対するショックが発生するが，そのショックに対する保険が存在しない不完備市場モデルにおいて，政府債務の存在が予備的動機により生じた過剰貯蓄を

表 1　米国を対象とした不完備市場モデルによる政府債務の分析

米国	無限期間生きる個人	有限期間生きる個人
定常状態	Aiyagari and McGrattan（1998），Floden（2001）	Peterman and Sager（2018）
移行経路	Röhrs and Winter（2017）	

表 2　日本を対象とした不完備市場モデルによる政府債務の分析

日本国	無限期間生きる個人	有限期間生きる個人
定常状態	Nakajima and Takahashi（2017）	
移行経路	Ino and Kobayashi（2020）	

吸収する役割を果たすことで社会的厚生を改善する可能性について指摘した。以下ではこのモデルの詳細について解説を行う。

Ⅱ－１．モデル：Aiyagari and McGrattan（1998）

このモデルには家計と企業，政府の三種のセクターが存在する。企業は，家計から労働力 L_t と資本 K_t を借り入れて生産を行う。生産関数は $Y_t=F(K_t,z_tL_t)$ として定式化される。ここで z_t は労働増大的な外生的技術進歩であり，現実のデータにおける経済成長を表すため，g を技術進歩率として $z_t=z(1+g)^t$ のように一定の率で成長することを想定する。

家計は毎期１単位の時間を保有し，その中で l_t を余暇に振り分け，残りの $1-l_t$ を労働に振り分け賃金所得を得る。ただし，家計は労働生産性ショック e_t に直面しており，賃金率を w_t とすると受け取る賃金収入は $w_te_t(1-l_t)$ となる。更に，保有した資産を企業もしくは政府に貸し出すことで金利 r_t を受け取り，政府からの所得移転より収入 Tr_t を得て，それらを消費 c_t と貯蓄 a_{t+1} に振り分ける。従って，家計の予算制約式は以下の通りとなる。

$$c_t+\mathrm{a}_{t+1}\leq(1-\tau_y)w_te_t(1-l_t)+(1+r_t(1-\tau_y))a_t+Tr_t$$

ただし，ここで τ_y は収入に対する課税率である。

家計は（c_t, l_t）を選択した際に効用

$$u(c_t,l_t)=\frac{(c_t^{\mu}l_t^{1-\mu})^{1-\nu}}{1-\nu}$$

を得る。０期の初期条件（a_0, e_0）を所与として，家計は $\{c_t,l_t,a_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ を次の最適化問題を解くように選択する。

$$\max_{\{c_t,l_t,a_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}}\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\frac{(c_t^{\mu}l_t^{1-\mu})^{1-\nu}}{1-\nu} \tag{1}$$

$$\text{s.t.}\quad c_t+a_{t+1}\leq(1-\tau_y)w_te_t(1-l_t)+(1+r_t(1-\tau_y))a_t+Tr_t \tag{2}$$

$$c_t\geq0,\ a_{t+1}\geq0,\ \forall t.$$

このモデルの大きな特徴は，労働生産性ショックである e_t についての保険市場が存在しないために市場が不完備となっていることである。効用最大化のために消費の平準化を目指す家計は，この状況に対し貯蓄を増やすことで対応することとなる。

政府は家計より労働賃金と金利収入についての課税から収入，及び今期の政府債務発行により収入を得て，それを政府支出 G_t，過去の政府債務の返済，及び政府から家計への所得移転に利用する。したがって，政府の予算制約式は

$$G_t+(1+r_t)B_t+Tr_t=B_{t+1}+\tau_yr_tK_t+\tau_yw_tL_t$$

と表される。トレンドの除去と定常均衡の定義は補論で記述する。

Aiyagari and McGrattan（1998）では，表３のようにパラメータを設定している。

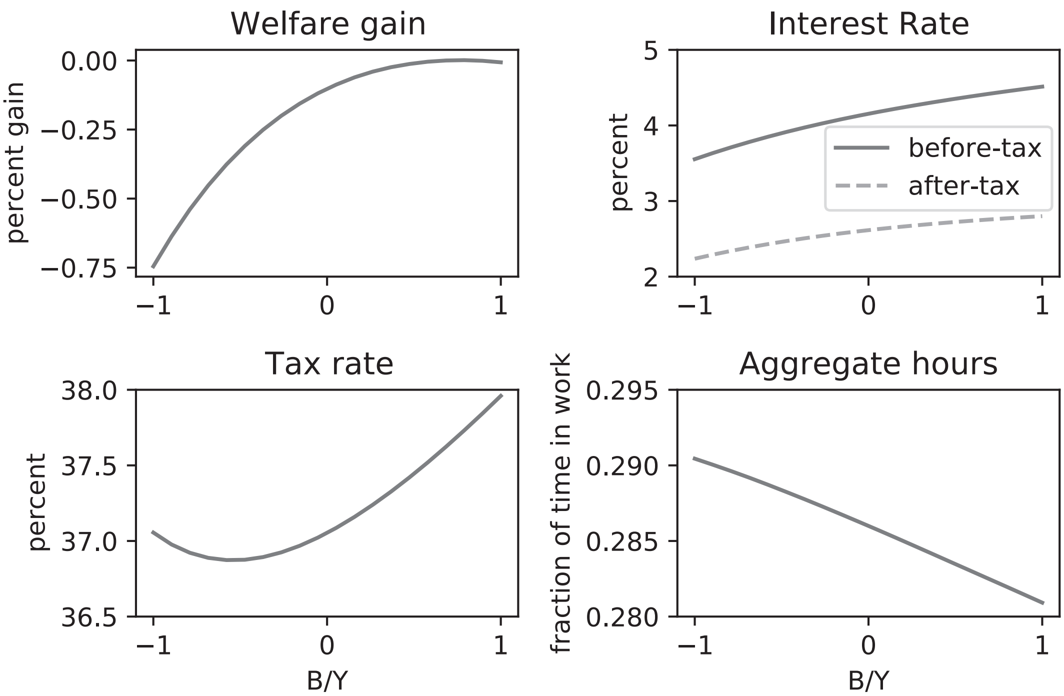
AMでは，様々な対GDP政府債務比率の値においての定常均衡を比較している。図１はそのシミュレーション結果を示している。

政府負債が０の場合，過剰貯蓄により金利が引き下げられ，そのような状況でも個々人は予備的貯蓄のための貯蓄をやめないため経済全体では過剰な資本が存在している状況となる。その結果，政府負債が増えることにより貯蓄の借り受け手が増加し，結果として過剰な貯蓄を解消することで社会的厚生が改善する可能性がある。彼らのモデルをアメリカ経済のデータと適応するようパラメータを設定した結果，図１が示す通り社会的厚生を最大化する対GDP政府負債比率は66％程度であり，当時の米国の水準とさほど変わらないレベルである，という結論を導いている。

表３　AM の不完備市場モデルのパラメータ設定

パラメータの記述	パラメータ	値	ターゲット
年齢の最大値	J	81	仮定
成長率	g	1.85%	米国の戦後平均値
対 GDP 比政府支出	γ	21.7%	米国の戦後平均値
対 GDP 比政府移転	χ	8.2%	米国の戦後平均値
対 GDP 比政府負債	b	2/3	仮定
割引率	β	0.991	金利
借り入れ制約	$\underline{a}$	0.0	仮定
資本分配率	θ	0.3	NIPA
資本減耗率	δ	0.075	投資 / 総生産 = 0.255
相対的リスク回避度の係数	μ	1.5	他の文献より
労働の不効用のパラメータ	η	0.328	労働の弾力性
労働生産性ショックの自己相関	ρ	0.6	他の文献より
労働生産性ショックの分散	σ	0.3	他の文献より

図１　AM における定常状態の比較



Ⅲ．不完備市場モデルにおける政府負債：有限期間生きる個人での定常状態の比較

Peterman and Sager（2018）（以下 PS）ではAMの正の対GDP比政府負債比率が社会的厚生を最大化するという結論に対し，個々人が有限期間しか生存しない世代重複構造を導入した不完備市場モデルを用いて，社会的厚生を最大化する対GDP比政府負債比率は負，つまり政府が純資産を持つべきであると結論づけている。

Ⅲ－１．Peterman and Sager：家計

AMのモデルと最も異なる点は家計の生存期間が有限であるということである。この経済にはJ世代が存在し，$j=1$は21歳，$j=J=80$は100歳に相当する。j歳の人間が$j+1$歳まで生存する確率をψ_jで表し，$\psi_J=0$とする。毎期$j=1$歳に新しく世代が誕生し，その世代の人数は$g_n>0$の率で増加するものとする。

$j=0$世代の選好は次のように表される。

$$\mathbb{E}_1\sum_{j=1}^{J}\beta^{j-1}\psi_j[u(c_j)-v(h_j)]$$

個々人の労働生産性e_jは次のように遷移する。

$$\log(e_j)=\kappa+\theta_j+\nu_j+\varepsilon_j$$

ただし，（ｉ）$\kappa\sim N(0,\sigma_\kappa^2)$は個人レベルの固定効果，（ii）$\{\theta_j\}_{j=1}^{J}$は非確率的な年齢レベルの固定効果，（iii）$\nu_j$はAR(1)に従う個人レベルの持続的なショック$\nu_{j+1}=\rho\nu_j+\eta_{j+1},\eta_{j+1}\sim N(0,\sigma_\nu^2)$,(iv)$\epsilon_j\sim N(0,\sigma_\epsilon^2)$は個人レベルの一時的なショックである。表記を簡便化するため，これらのショックをまとめて$\varepsilon_j=(\kappa,\theta_j,\nu_j,\epsilon_j)$と表し，その遷移確率を$\pi_j(\varepsilon_{j+1}|\varepsilon_j)$と表す。

Ⅲ－２．Peterman and Sager：社会保障

PSでは世代構造を現実に近づけるため，社会保障を導入している。労働生産性がeでかつh時間を労働に振り分けた消費者の労働賃金がwehで与えられるとき，税率τ_{ss}をかけたものもしくは期間ごとの上限額$\bar{m}$を社会保障費用として支払うこととなる。PSでは社会保障費のうち半額を消費者が支払い残りを企業が支払うと仮定しているため，消費者が支払う社会保障関連費用は$(\tau_{ss}/2)\min\{weh,\bar{m}\}$となる。

消費者への定年後の年金給付額は過去の平均給与によって決定される。過去の平均給与は，$m_1=0$として，

$$m_{j+1}=\begin{cases}\dfrac{1}{j}\left(\min\{weh,\overline{m}\}+(j-1)m_j\right) & \\ \max\left\{m_h,\dfrac{1}{j}\left(\min\{weh,\overline{m}\}+(j-1)m_j\right)\right\} & \text{for } j\le 35,\\ m_j & \text{for } j\in(35,J_{ret}),\end{cases}$$

$$\text{for } j\ge J_{ret} \tag{21}$$

と決定される。年金給付額は平均給与の一定割合を支払う形で決定されるが，その割合は所得に応じて変化していく。平均給与が$b^{ss}{}_1$まではτ_{r1}の割合が支給され，$b^{ss}{}_1$を超えた額については$b^{ss}{}_2$まではτ_{r2}の割合が，$b^{ss}{}_2$を超えた額については$b^{ss}{}_3$まではτ_{r3}の割合が支給され，それ以降は平均給与が増えても年金支給額は増加しない。この関係を書き下すと，

$$b^{ss}_{base}(mj_{ret}) = \begin{cases} \tau_{r1}(mj_{ret}) & \text{for } mj_{ret} \in [0, b^{ss}_1), \\ \tau_{r1}b^{ss}_1 + \tau_{r2}(mj_{ret} - b^{ss}_1) & \text{for } mj_{ret} \in [b^{ss}_1, b^{ss}_2), \\ \tau_{r1}b^{ss}_1 + \tau_{r2}b^{ss}_2 + \tau_{r3}(mj_{ret} - b^{ss}_1 - b^{ss}_2) & \text{for } mj_{ret} \in [b^{ss}_2, b^{ss}_3), \\ \tau_{r1}b^{ss}_1 + \tau_{r2}b^{ss}_2 + \tau_{r3}b^{ss}_3 & \text{for } mj_{ret} \geq b^{ss}_3, \end{cases} \tag{22}$$

と表される。

これらの社会保障の構造の下で，被課税所得は以下のように定義される。

$$y(h,a,\varepsilon) = \begin{cases} we(\varepsilon)h + r(a+Tr) - \dfrac{\tau_{ss}}{2}\min\{we(\varepsilon)h, \overline{m}\} & \text{if } j < J_{ret} \\ r(a+Tr) & \text{if } j \geq J_{ret} \end{cases} \tag{23}$$

被課税所得が y で与えられたとき，所得税は Gouveia and Strauss（1994）に従い次のような関数型を取ると仮定する。

$$Y(y) = \tau_0\left(y - (y^{-\tau_1} + \tau_2)\right)^{-\frac{1}{\tau_1}} \tag{24}$$

Ⅲ－3．Peterman and Sager：家計の最適化問題

家計の状態変数は資産保有 a，労働生産性 ε，社会保険料と年齢である。定年前の年齢 j の家計の最適化問題は

$$V_j(a,\varepsilon,m) = \max_{c,a',h}[u(c) - v(h)] + \beta\psi_j \sum_{\varepsilon'} \pi_j(\varepsilon'|\varepsilon)V_{j+1}(a',\varepsilon',m')$$

$$c + a' \leq we(\varepsilon)h + (1+r)(a+Tr) - \frac{\tau_{ss}}{2}\min\{we(\varepsilon)h, \overline{m}\} - Y\left(y(h,a,\varepsilon)\right) \tag{25}$$

$$\text{s.t.} \tag{26}$$

$$a' \geq \underline{a} \tag{27}$$

と表される。また，定年後については，

$$V_j(a,\varepsilon,m) = \max_{c,a'}[u(c) - v(0)] + \beta\psi_j \sum_{\varepsilon'} \pi_j(\varepsilon'|\varepsilon)V_{j+1}(a',\varepsilon',m') \tag{28}$$

$$\text{s.t. } c + a' \leq (1+r)(a+Tr) + b_{ss}(m) - \mathrm{Y}(r(a+Tr)) \tag{29}$$

$$a' \geq \underline{a} \tag{30}$$

と表される。

(a,ε,m) 上の家計の確率密度を $\lambda(a,\varepsilon,m)$ とし，年齢 j の家計の割合を μ_j とする。定常均衡の定義は補論に記載する。パラメータは表4の通り設定している。

Ⅲ－4．数値計算

これらのパラメータ設定の元で，PS では無限期間生きる個人のケースとは異なり，対GDP 比政府債務比率が－61％，つまり政府はネットで負債を保有すべきでなく貯蓄をすべきとの結論が得られている。

AM のモデルでは個々人が無限期間を生きるため，貯蓄を積み上げれば長い期間ショックに対し消費平準化を維持することができる。そのため，政府負債を増加することで金利を引き上げ個々人に貯蓄を促すことは社会的厚生に正の効果が認められた。一方で，PS のモデルでは個々人は有限期間しか生存せず，その生存期間の大半は貯蓄を積み上げる若年期間・貯蓄を取り崩す老年期間であるため，政府負債を積み上げ金利を上昇させることで得られるメリットが大きくない。むしろ，政府が貯蓄を行うことで金利を低下させ，民間貯蓄を低下させることで消費をより平準化させることにより，社会的厚生を改善することができることをこの結果は示唆している。

表４　PSの世代重複構造のある不完備市場モデルのパラメータ設定

パラメータの記述	パラメータ	値	ターゲット
年齢の最大値	J	81	仮定
人口成長	g_n	1.1％	Conesa, Kitao, and Krueger（2009）
相対的リスク回避度の係数	σ	2.0	Kaplan（2012）
フリシュ弾力性	γ	0.5	Kaplan（2012）
労働不効用の係数	χ_1	56.2	平均労働時間＝1/3
割引率	β	1.012	資本／総生産＝2.7
借り入れ制約	$\underline{a}$	0.0	仮定
資本分配率	α	0.36	NIPA
資本減耗率	δ	0.0833	投資／総生産＝0.255
成長率	g_y	1.85％	NIPA
持続的なショックの自己相関	ρ	0.958	Kaplan（2012）
持続的なショックの分散	σ_v^2	0.017	Kaplan（2012）
永続的なショックの分散	σ_k^2	0.065	Kaplan（2012）
一次的なショックの分散	σ_ε^2	0.958	Kaplan（2012）
政府支出	G/Y	0.155	NIPA 1998-2007の平均
政府負債	B/Y	0.667	NIPA 1998-2007の平均
所得税の係数	τ_0	0.258	Gouveia and Strauss（1994）
所得税の累進度	τ_1	0.786	Gouveia and Strauss（1994）
所得税の累進度	τ_2	4.648	政府予算の均衡
社会保障費	τ_{xx}	0.103	社会保障プログラム

Ⅳ．不完備市場モデルにおける政府負債：移行経路の考察

Röhrs and Winters（2017）（以下RW）では無限期間生きる個人の仮定の元で，不完備市場モデルにおける政府債務削減の移行経路の分析を行っている。AMで行われていた分析は異なる対GDP比政府負債比率の元での定常均衡を比較し，その中で最も社会的厚生を最大化するものを最適な政府負債として定めたものであった。しかしながら，その分析から直ちに現状の対GDP比政府負債比率がいくらであろうとそこから最適な水準に移行すべき，という結論にはならない。AMの最適な政府負債比率は約66％であったが，仮に現在の政府負債比率が200％であった場合，66％の定常均衡に到達するまでには大きな財政再建が求められるためである。RWの分析ではこの点を考慮した上で政府負債を減らすことのコストについての考察を行っている。

RWにおいては，対GDP比政府負債比率が0.66から0.6に減少した場合の移行経路を計算している。減少の仕方については初期に大きく減少しその後徐々に減少していく凸なものと初期にはあまり減少せず時間が経つにつれ減少幅が大きくなる凸なものを考察し，政府債務を減少させるために所得に対する課税τ_yを変化させている。凹なものほど厚生ロスが小さいため，政府債務削減のためには家計に調整のタイミングを与えるため長期のスパンを取って取り組むことが望ましいことが示唆されている。また，定常状態のみを比較した場合では終期の厚生が高いにも関わらず移行経路を含めた分析では厚生変化はすべて負になっており，移行経路の分析を含めることが重要であることがわかる。

V．消費増税による政府債務削減のタイミング

Ino and Kobayashi（2020）では，日本において8%から10%への消費増税が二度に渡り延期されたことを受け，消費増税を早期に行うか，それとも政府債務が増大してから行うかの選択が資産保有量の異なる個人でどのように変化するかを分析した。モデルは無限期間生きる個人のモデルであり，AMと同様であるが，移行経路を次のように計算している。

V－1．移行経路

Tを政策変更後に新たに定常均衡にたどり着く時刻とする。T期以降は経済は定常状態に留まるため，移行経路はT個の関数の列として定義できる。初期には財政政策τ^{ini}に対応した定常均衡にいると仮定し，財政政策$\tau^{terminal}$に対応した定常均衡へたどり着くまでの移行経路を計算する。移行経路の定義は補論に記載する。

V－1－1．数値計算

このモデルのパラメータは日本のデータと整合的になるよう設定されている。具体的な設定は次の通りである。

このモデルでは，モデル上の1期は一年に対応する。Nakajima and Takahashi（2017）に従い，近年の低成長と低金利に対応して割引率と技術成長率を$\beta=0.991$，$g=0.009$と設定する。効用関数

$$u(c,l)=\left[\frac{(c^{\eta}l^{1-\eta})^{1-\mu}}{1-\mu}\right]$$

については文献で標準的な相対的リスク回避度一定の効用関数を用い，$\mu=1.5$，$\eta=0.328$と設定する。資産の下限については借り入れができない，つまり$\underline{a}=0$と設定する。資本分配率を0.3とするために生産関数のパラメータについては$\alpha=0.3$と定める。資本減耗率については資本生産量比率が4に近くなるよう$\delta=0.075$と設定する。

労働生産性のショックについては次のようなAR（1）に従うと仮定する。

$$\log(\epsilon_{t+1})=\rho\,\log(\epsilon_t)+\mathrm{e}_t,\mathrm{e}_t\sim N(0,\sigma_e{}^2).$$

Nakajima and Takahashi（2017）では個々人により時を通じて一定の固定効果部分が含まれていたが，本稿では移行経路について計算を行うため，計算の簡略化のために固定効果部分を取り除いている。パラメータ設定についてはNakajima and Takahashi（2017）に従い$\rho=0.9$及び$\sigma=0.226$と定める。このショックそのものは連続変数であるが，計算を実装するに当たりTauchen（1986）の方法を用いて取りうる値が7つの離散マルコフ過程により近似を行う。

財政政策の固定されたパラメータとして，初期の定常状態については

$$\chi=\frac{Tr}{Y}=0.14,\quad \gamma=\frac{G}{Y}=0.13$$

とし，終期の定常状態では

$$\gamma=\frac{G}{Y}=0.24$$

と設定した。初期の定常状態については，定常均衡における消費税の値が8%になるように設定し，終期の定常状態についてはFukawa and Sato（2009）を参考に設定した。内性的に決定される消費税以外の税については，Hansen and İmrohoroğlu（2016）にしたがって，$\tau_y=0.34$と設定した。

V－2．数値計算：移行経路

Ino and Kobayashi（2020）では0期に予想されない政府支出の恒久的な増加が起こり，それに対応した政策変化についての移行経路を分析している。具体的には，次のようなシミュレーションを行っている。

初期においては，経済はb＝0.6，つまり対

GDP 比政府負債が60％の定常状態にあると仮定する。

0期において政府支出 g の恒久的な増加が起こる。支出が増加しているため，τ_y を固定すると，政府の予算制約式を満たすためには消費税 τ_c を増やすか国債発行 b_{t+1} を増やす必要がある。

このような状況の下で，次のような二つの政策シナリオを考察する。

1．対 GDP 比政府負債比率が150％（$b=1.5$）になるまで消費税率を8％に保ち，その後消費税 τ_c を40年間かけて $b=1$ になるよう設定する。
2．対 GDP 比政府負債比率が200％（$b=2$）になるまで消費税率を8％に保ち，その後消費税 τ_c を40年間かけて $b=1$ になるよう設定する。

最初のシナリオが早期増税に対応し，次のシナリオが増税先送りに相当する。どちらのシナリオにおいても，政府債務比率が一定以上に到達した後の消費税率については b が一定の率で $b=1$ に40年間かけて収束するよう設定する。

この二つの政策シナリオの元での移行経路を計算し，0期において家計がどちらのシナリオの下でより高い効用を得るかを計算することで個々の家計が早期増税についてどのような選好を持つかを考察する。

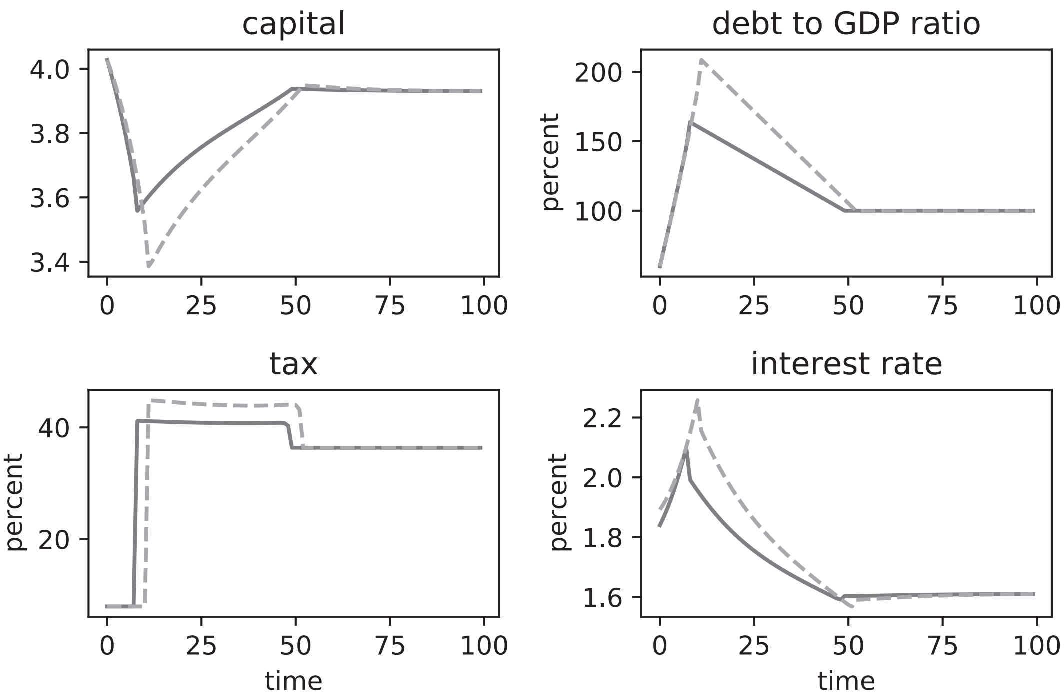
図２はこれらの政策シナリオの元での移行経路をプロットしている。

財政赤字を政府負債で補っている間は金利は上昇し資本は減少する。これは，より負債が増えることで資産への需要が上昇するためである。消費税が一旦増加し始めると政府負債は減少し資本は増加する。

終点での対 GDP 比政府債務比率は初期のものより大きいため，金利は長期的には減少することとなる。

早期増税と先送りのシナリオを比較すると，増税を先送りしたシナリオではより大きな消費増税が必要となることがわかる。これは，増税

図２　移行経路：早期増税 b=1.5（実線）増税先送り b=2（点線）



を先送りすることで政府債務残高が増加し，更に金利も上昇することで政府債務の削減により大きな財源が必要となるためである。しかしながら，増税を先送りしたことで消費増税はより先の未来に起こるため，消費増税額が大きいからといってただちに早期増税が望ましいということには必ずしもならない。

図３では早期増税と増税先送りのもとでの個々人の価値関数の差をプロットしている。数式で示すと，この図では，それぞれの労働生産性 ϵ について，

$$V_0(a,\epsilon;early\ tax\ increase) - V_0(a,\epsilon;late\ tax\ increase) \tag{49}$$

をプロットしていることになる。この数字が正であれば対応した状態 (a,ϵ) にいる家計は早期増税シナリオにおいてより高い効用を得ることとなる。

この図では，資産保有が少なく労働生産性が低い家計ほど早期増税によって高い効用を得るが，資産保有が多く労働生産性の高い家計は増税先送りによって高い効用を得ることが示されている。

これは，資産保有の多い人ほど増税先送りにより政府負債が増大し金利が上昇するほど利子収入を得られるが，資産保有の少ない人はそのメリットを享受できず，増税先送りによる消費増税額の引き上げのデメリットに直面するためである。また，労働生産性の高い家計は現在資産保有が少なくとも貯蓄を行うことができすぐ資産保有を多くできるために増税先送りによる金利上昇で高い効用を得るのに対し，労働生産性の低い家計は貯蓄を取り崩してしまうため現在資産保有が多くとも早期増税により高い効用を得ることとなる。

図４ではそれぞれの労働生産性に対応した家計の政策シナリオへの投票行動をプロットしている。この値は式（49）で示される価値関数の差が正であれば１を，そうでなければ０を取るようになっており，早期増税に投票するかどうかの指標として見ることができる。

図３　早期増税と増税先送りの効用水準の差分

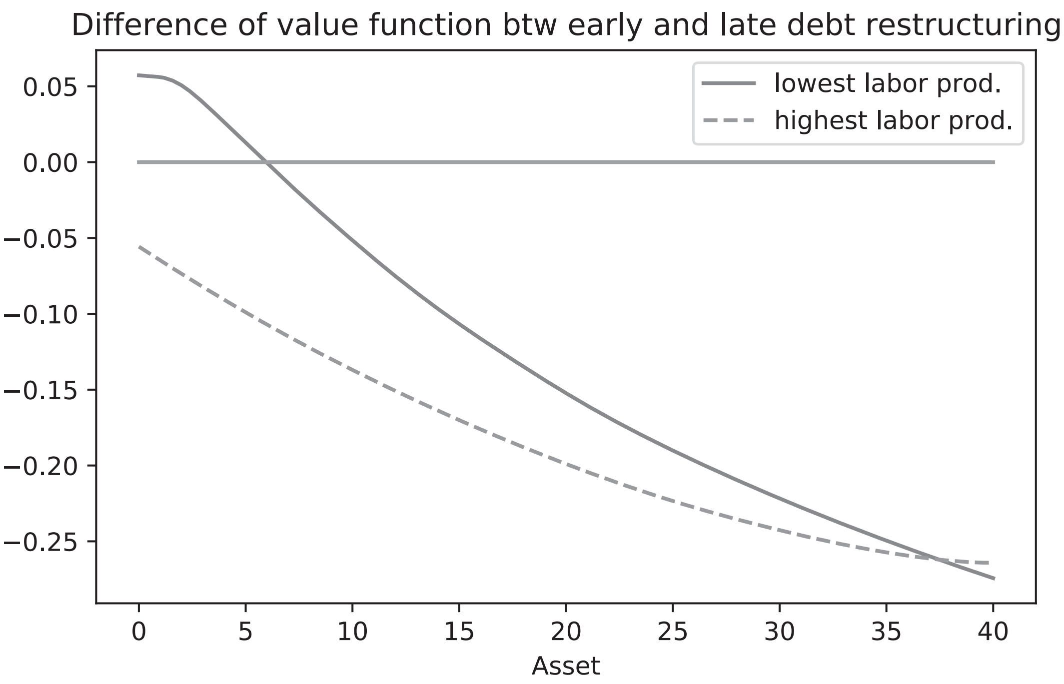


図４　投票：早期増税に賛成なら 1，先送りに賛成なら 0

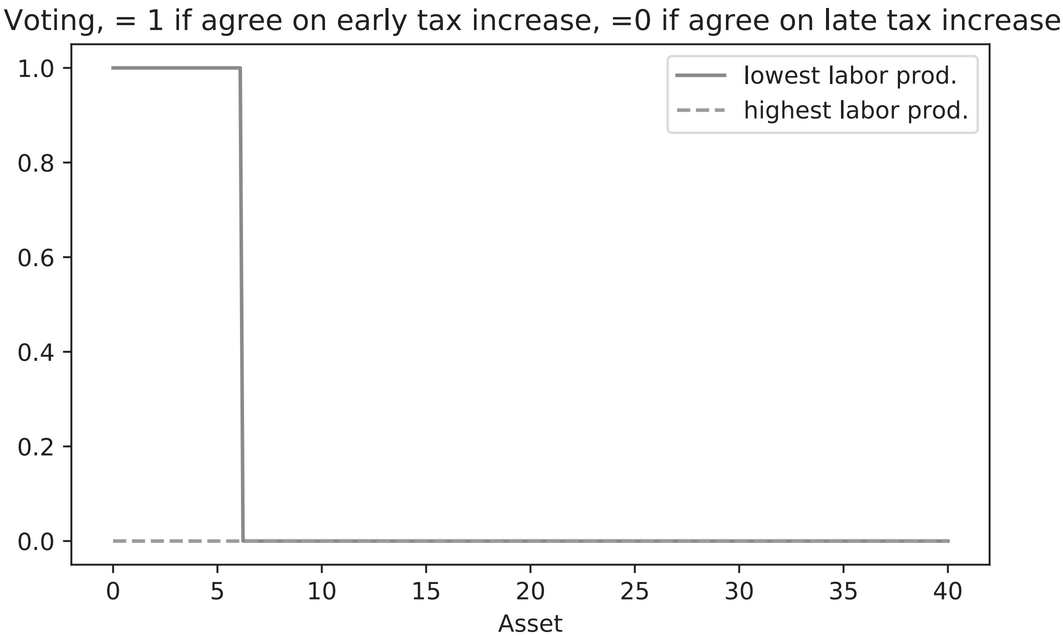


図４では価値関数の差通りに資産保有が少なく労働生産性の低い家計ほど早期増税に投票し，資産保有が高く労働生産性が高いほど増税先送りに投票することを示している。個々の家計の投票行動が分かればそれを家計の分布と掛け合わせて足し上げることで全体としての早期増税への投票率を計算することができ，Ino and Kobayashi（2020）のカリブレーションの元では早期増税への投票率は60.01％となった。早期増税への投票率が高いのは，多くの家計が資産保有の分布において下限付近に存在しているためである。

Ⅵ．むすび（結語・おわりに）

本稿では過剰貯蓄が発生し政府負債が正であることが社会厚生を高める可能性のある不完備市場モデルについて，特に世代重複構造を導入した場合と，政府債務を削減して新しい定常均衡に移行する経路を分析した場合についてレビューを行った。

有限期間生きる個人を仮定したPeterman and Sager（2018）では，無限期間生きる個人を仮定したAiyagari and Mcgrattan（1998）の結論とは異なり，最適な対GDP政府負債比率が負になりうるという結論を得た。これは，政府債務を増やすことで金利を上昇させ個々人が貯蓄を行いやすい環境を作るメリットが有限期間生きる個人の場合では貯蓄を積み終えた老年世代でしか享受できず，むしろ金利を低下させてより消費や余暇を平準化したほうが効用が高まるためである。

Röhrs and Winters（2017）では移行経路を

分析することで，長期的な定常状態同士の比較のみではより少ない政府債務に対応する均衡が高い社会厚生を実現するとしても，政府債務の大きい定常均衡から小さい定常均衡への移行に伴う短期的コストも含めた場合，政府債務削減が社会厚生を高めるとは言えないことを示した。ただし，この結果は，ある定常均衡から別の定常均衡への移行については成り立つが，現在の日本のように，債務が増大し続ける発散経路の経済から，債務一定の定常均衡に移行することについて評価を与えるものではないことに注意すべきである。Kobayashi and Ueda（2021）は，代表的個人モデルを使って，政府債務の発散経路から定常状態に消費増税で転換する政策を分析したが，その結果は消費増税による財政再建の方が発散経路よりも社会厚生を改善するというものであった。

Ino and Kobayashi（2020）では消費税を早期に増税するかもしくは先送りするかの移行経路の分析を行い，資産の少ない人ほど結果的に消費増税額が少なく済む早期増税を好み，資産の多い人ほど金利が高まり金利収入をより多く得られる増税先送りを好むことを示した。

不完備市場モデルによる分析は所得と資産の不平等を考慮に入れることができ，現在の経済環境の大きな特徴である持続的な低金利を説明できるものである。一方で，その計算コストから定常均衡同士のみの分析や無限期間生きる個人などの簡略化の仮定を置かれることがしばしばあり，これが結論に大きな影響を与えている可能性がある。表1，2で示した通りこの分野にはまだ行われるべき分析が数多い。特に世代重複構造を入れたモデルで移行経路を分析する研究は日米ともに行われておらず，今後の大きな研究課題である。

参考文献

Aiyagari, S.R. and E.R. McGrattan（1998）: "The optimum quantity of debt," *Journal of Monetary Economics*, 42, 447-469.

Badshah, M., P. Beaumont, and A. Srivastava（2013）: "Computing equilibrium wealth distributions in models with heterogeneous-agents, incomplete markets and idiosyncratic risk," *Computational Economics*, 41, 171-193.

Conesa, J.C., S. Kitao, and D. Krueger（2009）: "Taxing capital? Not a bad idea after all!" *American Economic Review*, 99, 25-48.

Conesa, J.C. and D. Krueger（1999）: "Social security reform with heterogeneous agents," *Review of Economic dynamics*, 2, 757-795.

Floden, M.（2001）: "The effectiveness of government debt and transfers as insurance," *Journal of Monetary Economics*, 48, 81-108.

Fukawa, T. and I. Sato（2009）: "Projection of pension, health and long-term care expenditures in Japan through macro simulation," *The Japanese Journal of Social Security Policy*, 8, 33-42.

Gouveia, M. and R.P. Strauss（1994）: "Effective federal individual income tax functions: An exploratory empirical analysis," *National Tax Journal*, 317-339.

Hansen, G.D. and S. İmrohoroğlu（2016）: "Fiscal reform and government debt in Japan: A neoclassical perspective," *Review of Economic Dynamics*, 21, 201-224.

Ino, A. and K. Kobayashi（2020）: "The Timing of Government Debt Reductions in the Presence of Inequality," *TKFD Working Paper Series*, 20-01.

Kaplan, G.（2012）: "Inequality and the life cycle," *Quantitative Economics*, 3, 471-525.

Kobayashi, K. and K. Ueda (2021): "Secular Stagnation and Low Interest Rates under the Fearof a Government Debt Crisis," *Journal of Money, Credit and Banking* (*forthcoming*).

Nakajima, T. and S. Takahashi (2017): "The optimum quantity of debt for Japan," *Journal of the Japanese and International Economies*, 46, 17-26.

Peterman, W. and E. Sager (2018): "Optimal Public Debt with Life Cycle Motives," *mimeo*.

Röhrs, S. and C. Winter (2017): "Reducing government debt in the presence of inequality," *Journal of Economic Dynamics and Control*, 82, 1-20.

Tauchen, G. (1986): "Finite state markov-chain approximations to univariate and vector autoregressions," *Economics letters*, 20, 177-181.

補論

トレンドの除去

AMのモデルでは外生的な技術成長 z_t が存在する。このままでは経済全体を表す変数は技術成長と同じペースで成長し，定常状態が定義できない。従って，定常状態を定義するためには，まずモデルの変数からトレンドを除去する必要がある。

トレンドを除去するために，それぞれの変数を総生産で割ったものを次のように表す。

$$\tilde{c}_t \equiv \frac{c_t}{Y_t},\ \tilde{a}_t \equiv \frac{a_t}{Y_t},\ \tilde{w}_t \equiv \frac{w_t}{Y_t},\ k_t \equiv \frac{K_t}{Y_t}, \quad (3)$$
$$\tilde{A}_t \equiv \frac{A_t}{Y_t},\ \tilde{Tr}_t \equiv \frac{Tr_t}{Y_t} \equiv \chi.$$

家計の予算制約式はすべて Y_t で割ることにより次のように変形できる。

$$\frac{c_t}{Y_t} + \frac{a_{t+1}}{Y_{t+1}}\frac{Y_{t+1}}{Y_t} \leq (1-\tau_y)\frac{w_t}{Y_t}e_t(1-l_t) \quad (4)$$
$$+\left(1+r_t(1-\tau_y)\right)\frac{a_t}{Y_t} + \frac{Tr_t}{Y_t}$$

$$\tilde{c}_t + (1+g)\tilde{a}_{t+1} \leq (1-\tau_y)\tilde{w}_t e_t(1-l_t) \quad (5)$$
$$+\left(1+r_t(1-\tau_y)\right)\tilde{a}_t + \chi.$$

また，消費者の目的関数については，$\tilde{\beta} \equiv \beta (1+g)^{\mu(1\_\nu)}$ と定義することにより，

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{(c_t^{\mu} l_t^{1-\mu})^{1-\nu}}{1-\nu} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t Y_t^{\mu(1-\nu)} \frac{[(c_t/Y_t)^{\mu} l_t^{1-\mu}]^{1-\nu}}{1-\nu} \quad (6)$$

$$= Y_0^{\mu(1-\nu)} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(\frac{Y_t}{Y_0}\right)^{\mu(1-\nu)} \frac{[\tilde{c}_t^{\mu} l_t^{1-\mu}]^{1-\nu}}{1-\nu} \quad (7)$$

$$= Y_0^{\mu(1-\nu)} \sum_{t=0}^{\infty} \tilde{\beta}^t \frac{[\tilde{c}_t^{\mu} l_t^{1-\mu}]^{1-\nu}}{1-\nu} \quad (8)$$

と書き直すことができる。従って，消費者の最適化問題は定常な動学的最適化問題として

$$\max_{\{\tilde{c}_t, l_t, \tilde{a}_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} Y_0^{\mu(1-\nu)} \sum_{t=0}^{\infty} \tilde{\beta}^t \frac{[\tilde{c}_t^{\mu} l_t^{1-\mu}]^{1-\nu}}{1-\nu} \quad (9)$$

s.t. $\tilde{c}_t + (1+g)\tilde{a}_{t+1} \leq (1-\tau_y)\tilde{w}_t e_t(1-l_t) + (1+r_t(1-\tau_y))\tilde{a}_t + \chi$ (10) $\tilde{c}_t \geq 0$, $\tilde{a}_{t+1} \geq 0, \forall t$ (11) と書き直すことができる。

AMの定常均衡

財政政策 $\tau = (\tau_y, \tilde{B})$ を所与として，この経済における定常均衡は，次の条件を満たす（$V, \tilde{a}', l, w, r, \mu, \tilde{K}, \tilde{L}$）の組である。

1. V は次のベルマン方程式の解となり，$(\tilde{a}', l)$ はそれに対応する政策関数である。

$$V(\tilde{a},\epsilon,\tau) = \max_{\tilde{c},\tilde{a}'\geq \underline{a},l}\left\{\frac{(\tilde{c}^{\eta}l^{1-\eta})^{1-\mu}}{1-\mu}+\tilde{\beta}E[V(\tilde{a}',\epsilon',\tau)]\right\} \quad (12)\text{ s.t.}$$

$$\tilde{c}+(1+g)\tilde{a}'= [1+(1-\tau_y)r]\tilde{a} + (1-\tau_y)\tilde{w}(1-l)\ \epsilon+\chi. \quad (13)$$

2．価格（r,w）と資本・労働投入量（$K,\tilde{L}$）は企業の利潤最大化と整合的である。

$$w=z(1-\alpha)\left(\frac{K}{zL}\right)^{\alpha-1} \quad (14)$$

$$\tilde{w}\equiv\frac{w}{z}=(1-\alpha)\left(\frac{\tilde{K}}{L}\right)^{\alpha-1} \quad (15)$$

$$r=\alpha\left(\frac{\tilde{K}}{L}\right)^{\alpha}-\delta. \quad (16)$$

3．資産市場，労働市場の需給が一致している。

$$L=\int\epsilon[1-l(a,\epsilon)]d\mu(a,\epsilon), \quad (17)$$

$$\tilde{A}=\tilde{K}+\tilde{B}. \quad (18)$$

4．家計の分布が時間を通じて一定である。

$$\mu(a',\epsilon',\tau) = \sum_a\sum_\epsilon 1\{a(a,\epsilon)=a'\}P(\epsilon'|\epsilon)\mu(a,\epsilon,\tau). \quad (19)$$

5．政府の予算制約式が満たされている。

$$\tau_y(r\tilde{K}+w\tilde{L})=\gamma+\chi+(r-g)\tilde{B}. \quad (20)$$

Peterman and Sager の定常均衡

財政政策$\tau=(G,B,B',R)$ を所与として，この経済における定常均衡は，次の条件を満たす（$\{V_j,c_J,a'_j,h_j,\lambda_j\}^J_{j=1},w,r,,K,L,Tr$）の組である。

1．V_j はベルマン方程式の解となり，（c_j,a'_j,h_j）はそれに対応する政策関数である。

2．価格（r,w）と資本・労働投入量（K,L）は企業の利潤最大化と整合的である。

$$w=z(1-\alpha)\left(\frac{K}{zL}\right)^{\alpha-1} \quad (31)$$

$$r=\alpha\left(\frac{\tilde{K}}{L}\right)^{\alpha}-\delta. \quad (32)$$

3．資産市場，労働市場の需給が一致している。

$$L=\sum_{j=1}^{J}\mu_j\int e(\varepsilon)h_j(a,\epsilon,m)d\lambda_j(a,\epsilon,m), \quad (33)$$

$$\sum_{j=1}^{J}\mu_j\int ad\lambda_j(a,\epsilon,m)=K+B. \quad (34)$$

4．家計の分布が時間を通じて一定である。

$$\lambda_{j+1}(a',\epsilon',m)=\int 1\{a'_j(a,\epsilon,m) =a'\}\ \psi_j\pi(\varepsilon'|\varepsilon)\ \lambda_j. \quad (35)$$

5．政府の予算制約式が満たされている。

$G+(1+r)B=B'+R$（36）ただし税収Rは以下の式で与えられる。

$$R\equiv\sum_{j=1}^{J}\mu_j\int Y\Big(y\big(h_j(a,\varepsilon,m)\big),a,\varepsilon\Big) d\lambda_j(a,\varepsilon,m). \quad (37)$$

6．意図しない遺産が死亡した人々の残した資産量と一致している。

$$(1+g_n)Tr =\sum_{j=1}^{J}(1-\psi_j)\mu_j\int a'_j(a,\varepsilon,m)d\lambda_j(a,\varepsilon,m). \quad (38)$$

7．社会保障が予算制約を満たしている。

$$\sum_{j=1}^{J}\int\tau_{ss}\min\{we(\varepsilon)h,\overline{m}\}d\lambda_j(a,\varepsilon,m) =\sum_{j=1}^{J}\int b_{ss}(m)d\lambda_j(a,\varepsilon,m). \quad (39)$$

Ino and Kobayashi（2020）の移行経路の定義

財政政策$\tau_t=$（$\tau_{y,t},\gamma_t,\chi_t,\tilde{B}_t$）を所与として，移行経路は次の条件を満たす関数の組（$V_t,\tilde{a}'_t,\bar{W}_t,r_t,\mu_t,\tilde{K}_t,L_t,\tau_{c,t})^T_{t=0}$ である。

消費者の最適化 V_t は次のベルマン方程式の解であり a'_t は対応した政策関数である。

$$V_t(a,\epsilon) =\max_{a',c,l}\{u(c,l)+\tilde{\beta}\sum_{\epsilon'}P(\epsilon'|\epsilon)V_{t+1}(a',\epsilon')]\} \quad (40)$$

s.t.

$$(1+\tau_{c,t})c+(1+g)a'=(1-\tau_{y,t})w_t\epsilon(1-l) +\Big(1+(1-\tau_{y,t})r\Big)a+\chi, \quad (42)$$

$$a'\geq a,\quad l\in[0,1],\quad c\geq 0,$$

ただし，最終期の価値関数は政策変更後の定

常状態の価値関数に等しい（$V_T(a, \epsilon) = V(a, \epsilon, \tau^{terminal})$）。

生産者の最適化価格（r,w）と資本・労働（k,L）は生産者の最適化と整合的である。

$$\tilde{W}_t \equiv \frac{W_t}{z_t} = (1-\alpha)\left(\frac{\tilde{K}_t}{L_t}\right)^{\alpha-1} \tag{43}$$

$$r_t = \alpha\left(\frac{\tilde{K}_t}{L_t}\right)^{\alpha} - \delta. \tag{44}$$

市場均衡：資産・労働市場の需給が一致する。

$L_t = \int \epsilon[1 - l_t(a,\epsilon)] \quad d\mu_t(a,\epsilon), \quad A\tilde{}t = K\tilde{}t + B\tilde{}t.$ (45)

定常分布家計の分布 μ_t は次のように遷移する。

(46)

$\mu_{t+1}(a', \epsilon') = \Sigma\Sigma 1\{a'_t(a,\epsilon)$

$= a'\} P(\epsilon'|\epsilon)\mu_t(a,\epsilon),$ (47)

a

with $\mu_0((a,\epsilon) = \mu(a,\epsilon,\tau^{ini}).$

政府の予算制約：政府の予算制約式が満たされる。

$G\tilde{}t + (1+rt)B\tilde{}t = B\tilde{}t+1(1+g) + \tau c,tC\tilde{}t + \tau y,t(rtK\tilde{}t + W\tilde{}tL).$ (48)

数値計算の詳細

本稿では，連続変数である資産を次のように離散化する。まず，資産の上限 a をそれ以上資産を保有する人の割合が無視できるほど少なくなるように設定する。資産の下限 $\underline{a}$ は借り入れ制約によりパラメータとして与えられる。上限と下限を決めたら，[$\underline{a}$,a] の間に等間隔で N_a 個の点を離散化した資産の取りうる値として扱う。Ino and Kobayashi (2020) では $a = 40$ と $N_a = 101$ の値を用いている。

定常均衡定常均衡の計算では次のようなアルゴリズムを用いる。

１．均衡金利と賃金（r,w）に関する推測を行い，（r_i,w_i）として設定する。

２．i 回目のループにおいて，資産市場と労働市場の需給ギャップを次のように計算する。

・（r_i,w_i）を所与として，家計の動学的最適化問題を解き政策関数（a'_i,l）を得る。動学的最適化問題を解くにあたり，有限期間生きる個人の元では最終期より後ろ向きに解き，無限期間生きる個人の場合はValue Function Iterationにより価値関数の誤差が一定以下になるまで計算を繰り返す。

・政策関数を用いて下記の手順で定常分布 $\mu_i(a,\epsilon)$ を計算する。

・価格（r_i,w_i）と政策関数 a'_i（a,ϵ）及び家計の分布 $\mu_i(a,\epsilon)$ が計算できれば，資産市場及び労働市場の需要と供給の定義より需給ギャップが計算可能である。

３．計算された需給ギャップが絶対値で一定以下 $|demand - supply| < \varepsilon$ であればそれが解であり，そうでなければ価格に関する推測を変更して再度計算を行う。

定常分布を計算するにあたっては次の手順を用いる。

・資産の空間について $N_a \times M$ 個の点を持つより細かなグリッドを作り出し，政策関数をこの空間の上で定義されるよう線形内挿する。Ino and Kobayashi (2020) では $M = 3$ を用いている。

・$a'(a,z) \in (a_i, a_{i+1})$ のとき，

$$p(a,z) = \frac{a_{i+1} - a'(a,z)}{a_{i+1} - a_i} \tag{51}$$

と定義する。これを用いて，a'に関する遷移確率行列を $a' = a_{i+1}$ を確率 $p(a,z)$ で，$a' = a_i$ を確率 $1 - p(a,z)$ で取るように構築する。この遷移確率行列より固有値を用いた方法（Badshah, Beaumont, and Srivastava (2013)）で定常分布は計算可能である。この方法を用いる理由としては，定常分布自体は固有値１に対応した一意な固有ベクトルであるが，数値計算上では固有値が１に近く見分けることが不可能なものが数多く存在する。これを回避するために，遷移行列に微小な値を加えて固有値１に対応する固有ベクトルを見つけやすくする，という手法である。

移行経路の計算

移行経路の計算において，Conesa and Krueger（1999）に従い価格ではなく資本と労働（K,L）について推測を行いループを繰り返す方法を用いている。

1．初期と終期の定常状態の計算を行う。終期の定常状態にたどり着く時点を T とする。
2．資本と労働の列についての推測 $(L^i_t,\tilde{K}^i_t)^T_{t=0}, i=0$ を行う。資本と労働の情報より企業の最適化の一階条件から価格の列 $(r^i_t,\tilde{W}^i_t)^T_{t=0}$ を計算する。
3．$(r^i_t,\tilde{W}^i_t)^T_{t=0}$ を所与として，資本と労働の列 $(L^{i*}_t,K^{i*}_t)^T_{t=0}$ を次のように計算する。
   (a) 価格と終点条件 $V_T(a,\epsilon)=V^{SS}(a,\epsilon)$ を所与として，家計の動学的最適化問題を後ろ向きに解く。
   (b) 政策関数を所与として，家計の分布を初期条件より前向きに計算する $\mu_0(a,\epsilon)=\mu^{SS}(a,\epsilon)$。
   (c) 政策関数と分布の情報を用いて，そこから示唆される資本と労働の列を計算する。
4．この過程で得られた資本と労働の列が推測したものと十分近いかどうか，$\max\{|K_{t,i}-K^*_{t,i}|,|L_{t,i}-L^*_{t,i}|\}<\varepsilon$ の条件を用いて判定する。もしこの条件が満たされていなければ，次のような形で資本と労働の列をアップデート $K_{t,i+1}=\omega K_{t,i}+(1-\omega)K^*_{t,i}$, $L_{t,i+1}=\omega L_{t,i}+(1-\omega)L^*_{t,i}$ し，ステップ 2 を再度実行する。この条件が満たされていた場合均衡の計算が完了する。

このアルゴリズムにより i が増加するにつれ $(K^i_t,L^i_t)^T_{t=0}$ が収束していくことは保証されていない。そのため，アップデートを行う際の古い推測へのウェイトωの値を様々なものに変え実験を行い，$\omega=0.9$ にて収束するという結果を得た。