

ソブリン・デフォルト・モデルの解法の正確性と速度： Tauchenの方法と3次スプライン補間の安定的パフォーマンス*¹

山崎 丈史*²

要 約

本稿では、AR(1)過程をTauchen及びRouwenhorstの方法で離散化し、価値関数(value function)を1次、2次、3次スプラインで補間した場合のソブリン・デフォルト・モデルの正確性と速度について検証した。その結果、(i) Tauchenの方法が安定した解を提供すること、(ii) 価値関数を補間した場合、補間をせずにグリッド数を増やすよりも正確性も速度も改善すること、(iii) 3次スプライン補間が、1次・2次スプラインと異なり、所得の過程の粘性やデフォルト時のコストのタイプと関係なく安定的な解を出すこと、が示された。

キーワード：ソブリン・デフォルト、数値計算、完全非線形DSGE

JEL Classification：F34, F41

I. はじめに

新興国の景気循環は、先進国の景気循環と異なることが指摘されている。新興国の景気循環の特徴は、先進国と比較して、生産がより激しく変動すること、消費の変動が生産の変動よりも激しいこと、国際収支及び金利が反循環的であること、ソブリン・デフォルトが頻繁に発生することである(Aguair and Gopinath, 2006 and 2007; Neumeyer and Perri, 2005; Uribe and Yue, 2006; Uribe and Schmitt-Grohe, 2017)。ソブリン・デフォルト・モデルはこのような新興国特有の景気循環の再現に成功して

きた(Aguair and Gopinath, 2006; Arellano, 2008)。しかしながら、モデルが完全非線形であり、解の計算時間が長いことが、モデルの推定への課題となっており、推定を実施した論文は、我々が知る限り、Gumus et al. (2017)とYamazaki (2018)だけである。

多くの研究において、ソブリン・デフォルト・モデルは価値関数反復法(value-function-iteration)によって解かれているが、その詳細は論文によって異なる(例：グリッド数、価値関数の補間方法、AR(1)過程の離散化の方

* 1 本稿の作成に当たって、服部孝洋先生(財務総合政策研究所)、渡部敏明教授(一橋大学)から有益なコメントをいただいた。ここに記して心より感謝申し上げる。ただし、残る誤りはすべて筆者らの責任に帰される。なお、本稿の内容は筆者らの個人的見解であり、筆者らの所属組織の公式見解を示すものではない。

* 2 財務省財務総合政策研究所主任研究官

法等)。Hatchondo et al. (2010) は、ソブリン・デフォルト・モデルの解法と正確性を広範にした論文で、3 次スプライン補間により価値関数を近似する方法が、価値関数を補間・近似しない DSS (discrete state space technique) と比較して効率的であることを指摘している。

しかしながら、Hatchondo et al. (2010) は AR (1) 過程の離散化の方法によって生じる違いについては検証していない。Kopecky and Suen (2010) は、別のモデルにおいて、粘着性が非常に高い AR (1) 過程を離散化する場合、Rouwenhorst (1995) の手法が他の方法よりも良いことを報告している。一方、ソブリン・デフォルト・モデルの分野では Tauchen (1986) が広く用いられている。本稿では、Rouwenhorst や Tauchen の方法を採用した場合の結果について検証する。なお、Kopecky and Suen (2010) は Tauchen の方法について、最良の結果ではなかったものの全てのケースにおいて安定的な結果を出したことも報告している。

さらに、スプライン補間の中でも、3 次、2 次、1 次の間にどの程度の違いがあるかについても検証する。ソブリン・デフォルト・モデルについて検証した Hatchondo et al. (2010) では、価値関数の近似に 3 次スプラインが用いられている一方で、確率的成長モデル (stochastic growth model) や Aiyagari (1994) and French (2005) のモデルについて検証した Kopecky and Suen (2010) では、線形 (1 次) 補間が活用されている。一般的には高次補間の方が正確性を改善するよう見えるが、1 次のスプライン補間 (線形補間) には、近似の際にノード間の振動 (internodal oscillations) が発生しないメリットがあることが指摘されており (Judd and Solnick, 1994; Wang and Judd, 2000; Stachurski, 2008; Cai and Judd, 2014), Richter et al (2014) は完全非線形のニュー・ケインジアン・マクロ・モデルにおいて、一部のケースにおいては、Chevyshev 補間よりも線形補間の方が正確な解を計算することを例示

している。また、Judd and Solnick (1994) では、解の正確性という観点では線形補間は 3 次スプラインに劣るが、常に収束する点は 3 次スプラインより優れていることを報告している。

本稿の第一の貢献は、Arellano (2008) のようにデフォルト時のコストが非対称 (asymmetric) な場合でも、Tauchen の方法が安定的に解を出すことを示したことである。直観に反して Tauchen の方法よりも、Rouwenhorst の方法が不安定となったことについて、考えられる理由として、Rouwenhorst の方法は、Tauchen の方法よりも現在と同じポイントに留まる確率が低めに出ることが挙げられる。この特徴は、粘着性の高い AR (1) 過程を近似すること自体には優位に働く一方で、債券価格の対外債務の水準に対する感応度 (bond price schedule) や政策関数 (policy function) の計算において、より多くの資産 (負債) についてのグリッド数が必要になることを示唆している。

もう一つの貢献は、Hatchondo et al. (2010) の結果は、AR (1) の離散化の方法に依らず頑健であることを示したことである。本稿においても、DSS は、bond price schedule や政策関数を正確に近似するためにスプライン補間で価値関数を近似する場合と比較して、非常に多くのグリッドが必要であることを示している。スプライン補間は、グリッドで同定されていない範囲の対外債務や経済の状態の情報が利用可能となり、モデル内の政府が最適な対外借入の水準を選択することを可能にする。

第三の貢献は、3 次スプライン補間が 1 次や 2 次のスプライン補間よりも、すべてのケースにおいて、安定的なパフォーマンスを発揮していることを示したことである。3 次スプラインの結果が安定する要因は、グリッド間の補間がより丁寧に行われることで、bond price schedule の傾きが急な場合においても、傾きの間にある信用リスクを捉えられるところにある。第五節で述べているように、比例的なデフォルト時のコストは、傾きが急な bond price schedule を生じやすい。このことは、ある対外債務の水準を超えると、信用

リスクが急に発生し、拡大し、すぐに上限に達してしまうことを示唆している。一方で、デフォルト時のコストが非対称である場合は、信用リスクは広い区間において徐々に拡大し、bond price schedule も穏やかなものとなる。したがって、デフォルト時のコストが比例的な場合は、非対称な場合よりも、グリッド間の正確性によって

得られる計算上のメリットが大きくなる。

本稿の残りの構成は以下の通りである。第二節において、本稿で検証するモデルについて説明する。第三節において、計算方法について説明する。第四節において結果を示し、第五節において頑健性を検証し、第六節において結論を述べる。

II. モデル

本稿は、Aguiar and Gopinath (2006) と Arellano (2008) と同じモデルを用いて計算速度と解の正確性の比較を行う。これらのモデルは、確率的な所得を受け取る小国開放経済モデルで、政府は家計の効用が最大化するように行動する。

II-1. モデル

代表的家計はリスク回避的で次のような効用を持つ。

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \quad (1)$$

β は主観的割引率、 c_t は消費、 $u(\cdot)$ は増加関数であり、狭義に凹な関数である。所得 y_t は一時的な (transitory) ショック z_t と恒久的な (permanent) 構成要素 Γ_t により遷移する。

$$y_t = \Gamma_t e^{z_t} \quad (2)$$

一時的なショック z_t は下記の AR (1) 過程に従う。

$$z_t = (1 - \rho_z) \mu_z + \rho_z z_{t-1} + \varepsilon_t^z \quad (3)$$

なお、 μ_z は長期的な平均、 $|\rho_z| < 1$ 、 $\varepsilon_t^z \sim N(0, \sigma_z^2)$ である。恒久的なショック Γ_t の確率過程はランダム・ウォークであるが、 Γ_t へのショック (トレンド・ショック) g_t は下記の AR (1) 過程に従う。

$$\Gamma_t = g_t \Gamma_{t-1} \quad (4)$$

$$\ln g_t = (1 - \rho_g) (\ln \mu_g - m) + \rho_g \ln g_{t-1} + \varepsilon_t^g \quad (5)$$

なお、 μ_g は長期的な平均、 $|\rho_g| < 1$ 、 $\varepsilon_t^g \sim N(0,$

$\sigma_g^2)$ で、 $m = \frac{1}{2} \frac{\sigma_g^2}{1 - \rho_g^2}$ である。全ての期 t において、政府は家計の期待効用を最大化するように行動する。政府は国際金融市場へのアクセスがあり、対外資産の額 b' (対外負債となる場合は負の値となる) を $q(b', z, \Gamma, g)$ の価格で購入 (売却) 可能となっている。

政府は毎期において、返済とデフォルトの意思決定を行っており、債券価格 $q(b', z, \Gamma, g)$ は、債務の水準 b' と経済の状態 z, Γ, g により決まるデフォルト確率を踏まえ、内生的に決定される。

政府に資金を貸す海外投資家は、債務の水準 b と経済の状態 z, Γ, g についての完全な情報を持っており、債券価格はリスク中立的に評価されると仮定する。均衡において、債券価格は下記の通りとなる。

$$q(b', z, \Gamma, g) = \frac{1}{1+r} \left[1 - \iint d(b', z', g', \Gamma, g') F_z(dz'|z) F_g(dg'|g) \right] \quad (6)$$

この式は、利潤ゼロ条件を満たしている。なお、 $d(b', z', g', \Gamma, g')$ は政府の最適なデフォルト・ルール (返済ルール) であり、 F_z と F_g は z と g の累積確率分布である。

デフォルトによって生じるコストが政府の返済へのインセンティブとなる一方で、デフォルトによって増加する利用可能な資源の増加がデ

フォルトへのインセンティブとなっている。様々なソブリン・デフォルトに関する研究成果を踏まえ、Aguiar and Gopinath (2006) と Arellano (2008) は、GDP (所得) の減少と国際金融市場からの排除といった、2つのデフォルト・コストを導入している。具体的には、政府がデフォルトを決定した場合、デフォルトから回復するまでは每期 $\phi(y)$ の分だけ GDP が減少する。また、政府はデフォルトしている期間は国際金融市場へのアクセスを失う。これらのデフォルト・コストは確率 $\psi[0,1]$ で解除される¹⁾。

政府が返済を選択した場合、予算制約式は下記の通りとなる。

$$c = y + b - q(b', z, \Gamma, g) b' \quad (7)$$

政府が債務のデフォルトを選択した場合、政府は国際金融市場へのアクセスを失い、予算制約式は下記の通りとなる。

$$c = y^{def}. \quad (8)$$

II-2. 再帰的均衡 (Recursive Equilibrium)

国際金融市場にアクセスのある状態での価値関数を $V^0(b, z, \Gamma, g)$ 、対外債務を返済する場合の価値関数を $V^c(b, z, \Gamma, g)$ 、デフォルトする場合の価値関数を $V^d(z, \Gamma, g)$ とする。

それぞれの価値関数は、下記のように定義される。

$$V^0(b, z, \Gamma, g) = \max_{\{c, d\}} \{V^c, V^d\} \quad (9)$$

$$V^c(b, z, \Gamma, g) = \max_b \left\{ u(c) + \beta \iint V^0(b', z', g', \Gamma, g') F_z(dz'|z) F_G(dg'|g) \right\} \quad (10)$$

$$V^d(z, \Gamma, g) = u(y - \phi(y)) + \beta \iint [\psi V^0(b', z', g', \Gamma, g') + (1 - \psi) V^d(z', g', \Gamma, g')] F_z(dz'|z) F_G(dg'|g). \quad (11)$$

定義 1. 再帰的均衡は、次の通りである。

1. 価値関数 $V^0(b, z, \Gamma, g)$ 、 $V^c(b, z, \Gamma, g)$ 、 $V^d(z, \Gamma, g)$ の集合
2. 対外資産 (負債) の関数 $b'(b, z, \Gamma, g)$ の集合、及び、デフォルト・ルール $d(b, z, \Gamma, g)$ の集合
3. 次のような債券価格関数 $q(b', z, \Gamma, g)$ の集合:
 - i. $V^0(b, z, \Gamma, g)$ 、 $V^c(b, z, \Gamma, g)$ 、 $V^d(z, \Gamma, g)$ 関数方程式 (9)、(10)、(11) を満たす
 - ii. デフォルト・ルール $d(b, z, \Gamma, g)$ が関数方程式 (9) を解き、対外資産の関数 $b'(b, z, \Gamma, g)$ が関数方程式 (10) を解く
 - iii. 債券の価格関数 $q(b', z, \Gamma, g)$ が式 (6) により与えられる

II-3. パラメーター

計算にあたって、Aguiar and Gopinath (2006) や Arellano (2008) を含む多くの先行研究が用いている、下記の効用関数を用いる。

$$u(c) = \frac{c^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma}. \quad (12)$$

デフォルト時の GDP へのコストは、Model I と Model II については、Aguiar and Gopinath (2006) と同様に、下記のような比例的なコストを定義する。

$$\phi(y) = \lambda y \quad (13)$$

Model III については、Arellano (2008) と同様に下記のような非対称なコストを定義する。

$$\phi(y) = \begin{cases} y - \lambda & \text{if } y > \lambda, \\ 0 & \text{if } y \leq \lambda. \end{cases} \quad (14)$$

モデルの各パラメーターについては、表 1 の

1) Arellano (2008) を含め、多数のソブリン・デフォルト・モデルにおいて、所得に対して外生的なコストが課されると仮定している。内生的なコストについては、Mendoza and Yue (2012) においてモデル化されている。実証研究においては、所得 (GDP) に対するコストの影響の大小、経路については議論が分かれている Panizza et al. (2009)。

表1 パラメーターの値

パラメーター		Model I	Model II	Model III
リスク回避度	γ	2.0	2.0	2.0
世界金利	r	1.0%	1.0%	1.7%
主観的割引率	β	0.8	0.8	0.953
国際金融市場への復帰確率	ψ	10.0%	10.0%	28.2%
デフォルト時の所得へのコスト	λ	2.0%	2.0%	0.969E[y]
1+長期的成長率	μ_g	1.006	1.006	1.00
一時的な (transitory) ショックの粘着性	ρ_z	0.9	—	0.945
一時的なショックの標準偏差	σ_z	0.034	—	0.025
恒久的な (permanent) ショックの粘着性	ρ_g	—	0.17	—
恒久的なショックの標準偏差	σ_g	—	0.03	—

値を用いる。パラメーターの値は、Aguiar and Gopinath (2006) や Arellano (2008) の各モデルのものを用いている。

Ⅲ. 計算方法

本稿では、モデルを価値関数反復法 (value function iteration) を用いて数値的に解く。ほとんどの手順は Hatchondo et al. (2010) と同じであるが、AR (1) 過程の離散化の方法に Tauchen (1986), Rouwenhorst (1995) を用いている点²⁾と、価値関数を近似するのに3次スプラインだけではなく、1次や2次のスプラインを用いている点異なる。本稿では、次の疑問について検証する。

- (a) Rouwenhorst の方法は、Tauchen の方法よりも正確で速いのか？
- (b) Hatchondo et al. (2010) で得られた結論は、Tauchen や Rouwenhorst の方法で AR (1) 過程を離散化した場合も変わらないのか？
- (c) 1次、2次、3次スプラインの間で、正確性や速度について顕著な違いがあるのか？

まず、(a) の疑問について、Kopecky and Suen (2010) は、確率的成長モデル (stochastic growth model) や Aiyagari (1994), French (2005) の経済モデルにおける、Tauchen (1986), Tauchen and Hussey (1991), Floden (2008) 版の Tauchen and Hussey, Adda and Cooper (2003), Rouwenhorst (1995) といった AR (1) の離散化方法のそれぞれのパフォーマンスを比較している。本稿では、紙面の都合上、Tauchen と Rouwenhorst の方法のみについて検証する。この2つの方法を選んだ理由は、まず、Rouwenhorst の方法が Kopecky and Suen (2010) の研究において、一番パフォーマンスが優れていたためである。Tauchen の方法については、Rouwenhorst 程ではなかったものの、すべてのモデルにおいて安定的に正確な解を計算していたためである。一部のケースにおけるパフォーマンスは、Tauchen-Hussey や、その Floden (2008) 版が Rouwenhorst や Tauchen

2) AR (1) を離散化するための Rouwenhorst や Tauchen の方法については、補論に掲載している。

を上回ることがあったものの、French (2005) のモデルや、グリッド数によってパフォーマンスが非常に悪くなっている。

次に (b) の疑問について、Aguiar and Gopinath (2006) や Arellano (2008) を含む多くのソプリン・デフォルト・モデルの研究について、DSS が活用されているが、Hatchondo et al. (2010) は価値関数を補間によって近似した方が、補間をせずにグリッド数を増やすよりも正確な解を速く得られることを示している。

最後に疑問 (c) について、Hatchondo et al. (2010) は、スプライン補間としては 3 次スプラインのみを実験しているが、線形補間には、近似の際にノード間の振動が発生しないメリッ

トがあることが指摘されており、必ずしも高次補間の方が正確性の高い解が得られるわけではない (Judd and Solnick, 1994; Wang and Judd, 2000; Stachurski, 2008; Cai and Judd, 2014)。なお、本稿で、Hatchondo et al. (2010) で試されている Chevyshev collocation を試していないのは、既に彼らの研究において、3 次スプラインがほぼ同程度の正確性で Chevyshev collocation よりも相当程度早く解けることが明らかとなっているためである。

正確性を評価するにあたって、ソプリン・デフォルト・モデルは解析的な解がないため、数値計算を用いて準正確な解 (quasi-exact solution) と比較する。準正確な解は、経済の

表 2 DSS を活用する場合のグリッド数

	Model I				
	Original	Coarse	Finer	Finest	Quasi-exact
Number of grid points for b	400	800	2,000	4,000	4,000
Number of grid points for y	25	400	1,500	2,000	2,000
	Model II				
	Original	Coarse	Finer	Finest	Quasi-exact
Number of grid points for b	400	800	2,000	4,000	4,000
Number of grid points for y	25	400	1,500	2,000	2,000
	Model III				
	Original	Coarse	Finer	Finest	Quasi-exact
Number of grid points for b	200	500	2,000	4,000	4,000
Number of grid points for y	21	500	1,000	2,000	2,000

表 3 スプライン補間を活用する場合のグリッド数

	Model I		
	Very coarse	Coarse I	Coarse II
Number of grid points for b	66	120	238
Number of grid points for y	40	35	69
	Model II		
Number of grid points for b	80	79	158
Number of grid points for y	40	61	124
	Model III		
Number of grid points for b	66	140	500
Number of grid points for y	25	50	125

状態に2000個、資産（債務）に4000個のグリッドを配置し、価値関数を3次スプラインにより補間する。評価の基準としては、シミュレーションによって計算された景気循環のモーメントが、準正確の解とどの程度近いのかを見る。モーメントの計算には、1000万期間のシミュレーションから、初期値の影響を除くため、最初の1万期間を除いたサンプルを用いる。また、Hatchondo et al. (2010) では、価値関数の収束の観点から正確な解が得られた場合でも、債券価格の値が準正確な解と乖離すること（spurious spread）を指摘しているため、グ

ラフで bond price schedule を確認する。グリッドの数は表2及び表3の通りである。解法の手続きについては、 $\max |V_i^0(b, z, \Gamma, g) - V_{i-1}^0(b, z, \Gamma, g)|$ が 10^{-6} となるまでの時間を各グリッド数において計算する。コードは Julia4.7 で書かれており、windows 10 のもと、Core-i7 6700（2.6 GHz）の CPU を活用して計算される。資産のグリッド b は -1.0 から 0.0 の範囲に配置し、Tauchen の方法のパラメーター Ω は、Tauchen (1986) や Kopecky and Suen (2010) に従い、3 とする。

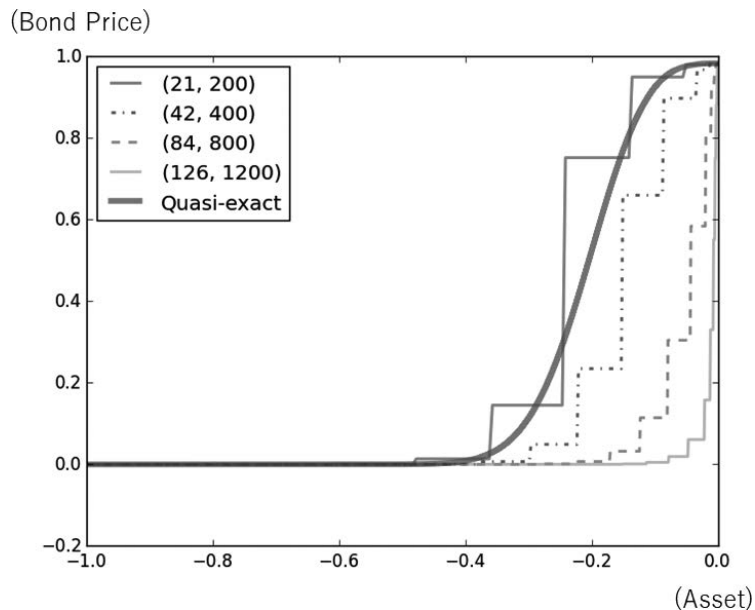
IV. 結果

IV-1. 結果が安定する Tauchen の方法

まず、Tauchen の方法と Rouwenhorst の方法の比較を実施する。図1は、Rouwenhorst

の方法で作成された Model III の bond price schedule であるが、グリッドの数を増加させる程、結果が悪くなっていることが分かる。図1

図1 Rouwenhorst 方法で所得の AR (1) 過程を離散化した Model III の bond price schedule (3次スプラインを実施)



は、Arellano (2008) と同様の比率 21 : 200 のグリッドによって計算した bond price schedule を示している。グリッド数が多くなるほど、準正確な解から遠のいていることが分かる。考えられる理由は、Rouwenhorst の方法によって計算される、同じ地点に止まる遷移確率 $\pi_{i,i}$ が、Tauchen の方法の場合よりも小さくなる傾向があることである。この性質は、粘着性の高い AR (1) 過程を近似すること自体には良い方向に働くが、bond price schedule を計算する際には、より多くの対外資産 (負債) へのグリッドが要求されることを示唆している。この現象は Model I や Model II では生じていないので、非対称なデフォルト・コストが Rouwenhorst の方法の不安定性に関係しているのではないかと推測される。

なお、Tauchen の方法では、このような不安定性は生じない。これ以降は、特に明示していなければ、AR (1) の離散化に Tauchen の方法を用いている。

IV-2. 補間を実施した方が、補間をせずにグリッド数を増やすよりも効率的である

表 4 は DSS のシミュレーションで得られたモーメントと準正確な解の結果の比率であり、参照すべき基準の値は 1.0 である。相関係数はシミュレーションで得られた値と準正確な解との差となっているため、0.0 が参照すべき基準の値となっている。この表には計算時間も記載されている。

結果からは、Kopecky and Suen (2010) と同様に、25 を下回る数のグリッド数で所得の AR (1) 過程自体は十分に正確な近似ができていたことが分かる (ただし、同研究と同様に、25 のグリッドでは最大 4% 弱の誤差が生じており、Rouwenhorst の方法よりも正確性に劣っている)。しかしながら、DSS は $\sigma(q)$ 、 $\rho(q, y)$ を正確に再現するために、相当程度のグリッド数が必要であることが示されている。DSS によって、これらの統計の近似誤差を 20% 以内に収めるためには、(4000, 2000) の

Finest 以上のグリッド数が必要であることが示されている一方、3 次スプラインを活用した場合は、(500, 125) でそれが達成されており、この数は DSS の Coarse に分類されるグリッド数よりも少ない (表 5, 6 及び 7)。

DSS の不正確性の源泉は、bond price schedule というよりは、政策関数にある (図 2)。Bond price schedule については、Coarse 以上のグリッド数があれば、ほとんど quasi-exact の解と同じ形・位置となっている。一方で、スプライン補間は bond price schedule と政策関数の両方がよく近似できている (図 3)。

IV-3. 3 次スプラインが線形補間や 2 次スプラインよりも正確である

線形補間や 2 次スプラインは Model I と Model II において正確性が失われている一方で、Model III では正確なモーメントが再現できている (表 5, 6 及び 7)。線形補間は、特に、Model II の $\sigma(q)$ 、 $\rho(q, y)$ 、そして $\rho(q, TB/Y)$ の正確性が低い。債券価格がほとんど変動しないため、 $\sigma(q)$ がほとんどゼロとなり、結果として $\rho(q, y)$ や $\rho(q, TB/Y)$ が安定していないためである。

それに対し、3 次スプラインは全てのモデルにおいて安定的に正確な解を出しており、Model I や Model II も例外ではない。Model I の $\sigma(q)$ の正確性が、他のモデルのケースと比較してやや低くなっているが、それでも DSS、線形補間、2 次スプラインより正確な結果となっている。

線形補間や 2 次スプラインが上手く機能しない理由としては、比例的なデフォルト時のコストが考えられる。Model I 及び Model II と異なり、Model III ではこの 2 つの方法でもほぼ正確な解が計算できているため、違いはデフォルト時のコストが比例的か、非対称的かということにあるのではないかと考えられる。デフォルト時のコストが比例的な場合、bond price schedule は傾きが急で直線的な形状となる (図 4)。このことは、比例的なデフォルト

表4 DSSのシミュレーションの時間と計算結果

	Model I				
	Original	Coarse	Finer	Finest	Quasi-exact
$\sigma(y)$	1.013	0.999	1.000	1.000	1.000
$\sigma(c)$	1.013	0.999	1.000	1.000	1.000
$\sigma(TB/Y)$	1.002	1.023	1.017	1.000	1.000
$\sigma(q)$	3.470	2.287	1.246	1.000	1.000
$\rho(c, y)$	0.000	0.000	- 0.000	0.000	0.000
$\rho(TB/Y, y)$	0.001	0.002	0.002	0.001	0.000
$\rho(q, y)$	0.451	0.436	0.158	- 0.000	0.000
$\rho(q, TB/Y)$	0.102	0.048	0.008	0.000	0.000
Average default period	- 0.000	0.000	0.000	- 0.000	0.000
Mean debt to output ratio	- 0.001	0.000	0.000	- 0.000	0.000
Time to converge	8.61 sec	8 min 41 sec	4 hrs. 4 min	23 hrs. 37 min	24 hrs. 18 min
	Model II				
	Original	Coarse	Finer	Finest	Quasi-exact
$\sigma(y)$	1.003	1.000	0.999	1.000	1.000
$\sigma(c)$	1.003	1.000	0.999	1.000	1.000
$\sigma(TB/Y)$	0.996	0.997	0.999	1.000	1.000
$\sigma(q)$	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000
$\rho(c, y)$	0.000	- 0.000	0.000	0.000	0.000
$\rho(TB/Y, y)$	0.000	- 0.000	- 0.000	- 0.000	0.000
$\rho(q, y)$	NaN	NaN	NaN	NaN	0.000
$\rho(q, TB/Y)$	NaN	NaN	NaN	NaN	0.000
Average default period	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
Mean debt to output ratio	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000
Time to converge	8.23 sec	8 min 0 sec	3 hrs. 26 min	19 hrs. 55 min	21 hrs. 47 min
	Model III				
	Original	Coarse	Finer	Finest	Quasi-exact
$\sigma(y)$	1.033	0.999	1.000	1.000	1.000
$\sigma(c)$	1.038	0.999	1.000	1.000	1.000
$\sigma(TB/Y)$	1.241	1.002	1.002	0.999	1.000
$\sigma(q_s)$	1.974	1.465	1.205	1.087	1.000
$\rho(c, y)$	0.003	0.000	0.000	0.000	0.000
$\rho(TB/Y, y)$	0.009	0.000	- 0.000	- 0.000	0.000
$\rho(q, y)$	- 0.461	- 0.213	- 0.041	- 0.005	0.000
$\rho(q, TB/Y)$	0.339	0.261	0.130	0.062	0.000
Average default period	- 0.007	- 0.001	0.001	0.000	0.000
Mean debt to output ratio	- 0.005	0.000	- 0.000	0.000	0.000
Time to converge	4.32 sec	10 min 24 sec	5 hrs. 6 min	40 hrs. 15 min	52 hrs. 52 min

表 5 補間法のシミュレーションの時間と計算結果 (Model I)

	Linear			
	Very coarse	Coarse I	Coarse II	Quasi-exact
$\sigma(y)$	1.004	1.007	1.002	1.000
$\sigma(c)$	1.001	1.005	1.002	1.000
$\sigma(TB/Y)$	0.190	0.769	1.113	1.000
$\sigma(q)$	1.559	4.38	5.784	1.000
$\rho(c, y)$	- 0.001	- 0.000	0.000	0.000
$\rho(TB/Y, y)$	0.142	- 0.008	- 0.014	0.000
$\rho(q, y)$	- 0.668	- 0.462	0.535	0.000
$\rho(q, TB/Y)$	- 0.243	- 0.253	0.134	0.000
Average default period	- 0.004	- 0.002	0.001	0.000
Mean debt to output ratio	- 0.001	- 0.001	- 0.001	0.000
Time to converge	0.57 sec	1.05 sec	8.17 sec	24 hrs. 18 min
	Quadratic			
	Very coarse	Coarse I	Coarse II	Quasi-exact
$\sigma(y)$	1.004	1.005	1.000	1.000
$\sigma(c)$	1.000	1.003	1.000	1.000
$\sigma(TB/Y)$	0.178	0.704	1.017	1.000
$\sigma(q)$	1.359	3.494	5.250	1.000
$\rho(c, y)$	- 0.001	- 0.000	0.000	0.000
$\rho(TB/Y, y)$	0.159	0.007	- 0.000	0.000
$\rho(q, y)$	- 0.683	- 0.540	0.548	0.000
$\rho(q, TB/Y)$	- 0.189	- 0.354	- 0.134	0.000
Average default period	- 0.004	- 0.003	- 0.000	0.000
Mean debt to output ratio	- 0.001	- 0.001	- 0.001	0.000
Time to converge	0.59 sec	1.05 sec	8.38 sec	21 hrs. 47 min
	Cubic			
	Very coarse	Coarse I	Coarse II	Quasi-exact
$\sigma(y)$	1.004	1.006	1.001	1.000
$\sigma(c)$	1.000	1.004	1.001	1.000
$\sigma(TB/Y)$	0.146	0.601	0.596	1.000
$\sigma(q)$	1.173	1.242	1.194	1.000
$\rho(c, y)$	- 0.001	- 0.001	- 0.001	0.000
$\rho(TB/Y, y)$	- 0.102	0.033	0.034	0.000
$\rho(q, y)$	- 0.690	- 0.525	- 0.650	0.000
$\rho(q, TB/Y)$	- 0.004	- 0.219	- 0.013	0.000
Average default period	- 0.004	- 0.003	- 0.004	0.000
Mean debt to output ratio	- 0.001	- 0.001	- 0.001	0.000
Time to converge	0.52 sec	1.09 sec	8.12 sec	52 hrs. 52 min

表6 補間法のシミュレーションの時間と計算結果 (Model II)

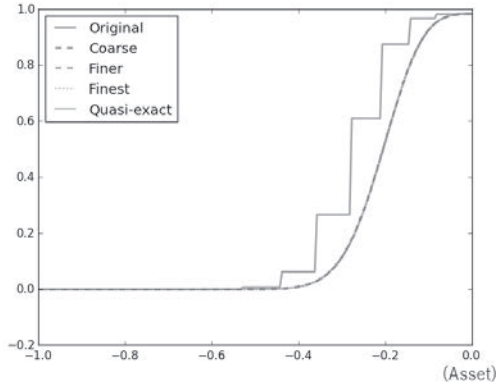
	Linear			
	Very coarse	Coarse I	Coarse II	Quasi-exact
$\sigma(y)$	1.001	1.000	1.000	1.000
$\sigma(c)$	1.001	1.000	1.000	1.000
$\sigma(TB/Y)$	0.995	0.959	0.977	1.000
$\sigma(q)$	0.000	0.000	0.000	1.000
$\rho(c, y)$	0.000	- 0.000	- 0.000	0.000
$\rho(TB/Y, y)$	0.000	0.000	- 0.000	0.000
$\rho(q, y)$	NaN	NaN	NaN	0.000
$\rho(q, TB/Y)$	NaN	NaN	NaN	0.000
Average default period	0.000	0.000	0.000	0.000
Mean debt to output ratio	0.000	0.000	0.000	0.000
Time to converge	0.67 sec	0.91 sec	6.55 sec	24 hrs. 18 min
	Quadratic			
	Very coarse	Coarse I	Coarse II	Quasi-exact
$\sigma(y)$	1.001	1.000	1.000	1.000
$\sigma(c)$	1.001	1.000	1.000	1.000
$\sigma(TB/Y)$	0.995	0.959	0.976	1.000
$\sigma(q)$	2.048	2.518	2.563	1.000
$\rho(c, y)$	- 0.000	0.000	- 0.000	0.000
$\rho(TB/Y, y)$	0.000	0.000	- 0.000	0.000
$\rho(q, y)$	- 0.440	- 0.050	- 0.346	0.000
$\rho(q, TB/Y)$	0.449	0.055	0.342	0.000
Average default period	0.000	0.000	0.000	0.000
Mean debt to output ratio	0.000	0.000	0.000	0.000
Time to converge	0.63 sec	0.90 sec	6.93 sec	21 hrs. 47 min
	Cubic			
	Very coarse	Coarse I	Coarse II	Quasi-exact
$\sigma(y)$	1.001	1.000	1.000	1.000
$\sigma(c)$	1.001	1.000	1.000	1.000
$\sigma(TB/Y)$	0.995	0.959	0.976	1.000
$\sigma(q)$	0.676	0.951	0.942	1.000
$\rho(c, y)$	0.000	- 0.000	0.000	0.000
$\rho(TB/Y, y)$	- 0.000	- 0.000	0.000	0.000
$\rho(q, y)$	0.106	0.003	0.141	0.000
$\rho(q, TB/Y)$	- 0.106	0.008	- 0.030	0.000
Average default period	0.000	0.000	0.000	0.000
Mean debt to output ratio	- 0.002	- 0.002	- 0.002	0.000
Time to converge	0.67 sec	0.89 sec	7.32 sec	52 hrs. 52 min

表7 補間法のシミュレーションの時間と計算結果 (Model III)

	Linear				
	Very coarse	Coarse I	Coarse II	Coarse III	Quasi-exact
$\sigma(y)$	1.023	1.006	1.000	1.000	1.000
$\sigma(c)$	1.019	1.005	1.000	1.000	1.000
$\sigma(TB/Y)$	0.957	0.978	1.002	1.003	1.000
$\sigma(q)$	0.977	1.006	0.995	1.014	1.000
$\rho(c, y)$	0.001	0.000	- 0.000	- 0.000	0.000
$\rho(TB/Y, y)$	0.006	- 0.000	- 0.001	- 0.001	0.000
$\rho(q, y)$	- 0.527	- 0.503	- 0.453	0.357	0.000
$\rho(q, TB/Y)$	0.372	0.289	0.056	0.027	0.000
Average default period	- 0.027	- 0.022	- 0.014	- 0.009	0.000
Mean debt to output ratio	0.002	0.001	- 0.000	- 0.000	0.000
Time to converge	5.44 sec	25.31 sec	5 min 20 sec	4 min 5 sec	24 hrs. 18 min
	Quadratic				
	Very coarse	Coarse I	Coarse II	Coarse III	Quasi-exact
$\sigma(y)$	1.022	1.004	0.999	0.999	1.000
$\sigma(c)$	1.023	1.003	1.000	1.000	1.000
$\sigma(TB/Y)$	1.104	0.996	1.008	1.005	1.000
$\sigma(q)$	1.209	1.013	0.978	1.004	1.000
$\rho(c, y)$	- 0.001	0.000	- 0.000	- 0.000	0.000
$\rho(TB/Y, y)$	0.013	- 0.001	- 0.002	- 0.001	0.000
$\rho(q, y)$	- 0.546	- 0.506	- 0.475	- 0.379	0.000
$\rho(q, TB/Y)$	0.420	0.291	0.048	0.022	0.000
Average default period	- 0.024	- 0.022	- 0.015	- 0.010	0.000
Mean debt to output ratio	- 0.001	0.001	- 0.000	- 0.000	0.000
Time to converge	2.17 sec	13.79 sec	3 min 56 sec	1 hrs. 20 min	21 hrs. 47 min
	Cubic				
	Very coarse	Coarse I	Coarse II	Coarse III	Quasi-exact
$\sigma(y)$	1.024	1.005	1.000	1.000	1.000
$\sigma(c)$	1.025	1.005	1.001	1.000	1.000
$\sigma(TB/Y)$	1.116	1.000	1.008	1.002	1.000
$\sigma(q)$	1.218	1.066	0.979	1.003	1.000
$\rho(c, y)$	- 0.001	0.000	- 0.000	- 0.000	0.000
$\rho(TB/Y, y)$	0.132	- 0.001	- 0.001	- 0.001	0.000
$\rho(q, y)$	- 0.547	- 0.504	0.475	- 0.376	0.000
$\rho(q, TB/Y)$	0.419	0.269	0.048	0.024	0.000
Average default period	- 0.024	- 0.021	- 0.015	- 0.010	0.000
Mean debt to output ratio	- 0.001	0.001	- 0.000	- 0.000	0.000
Time to converge	4.03 sec	26.41 sec	5 min 36 sec	36 min 48 sec	52 hrs. 52 min

図2 Model III の bond price schedule 及び政策関数 (DSS)

(A) The bond price schedules
(Bond Price)



(B) The policy functions
(Asset)

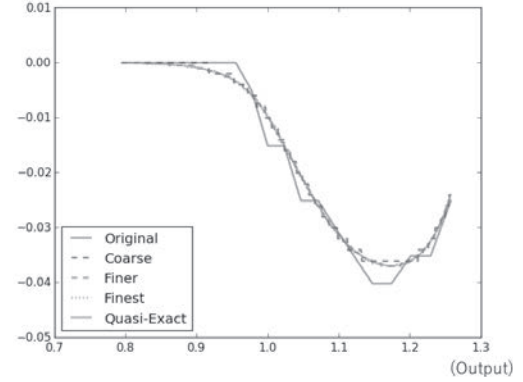
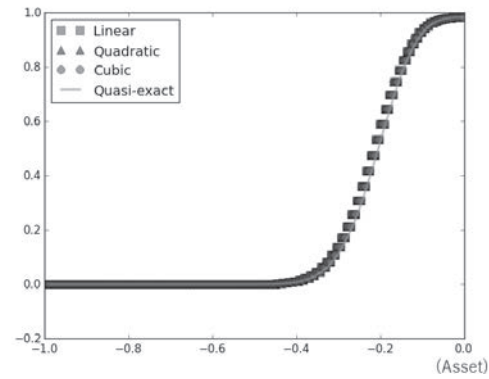


図3 Model III の及び政策関数 (スプライン補間を実施)

(A) The bond price schedules
(Bond Price)



(B) The policy functions
(Asset)

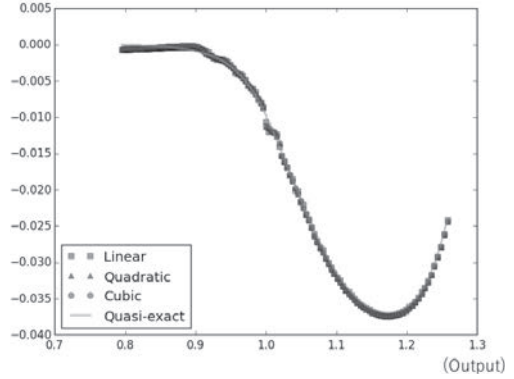
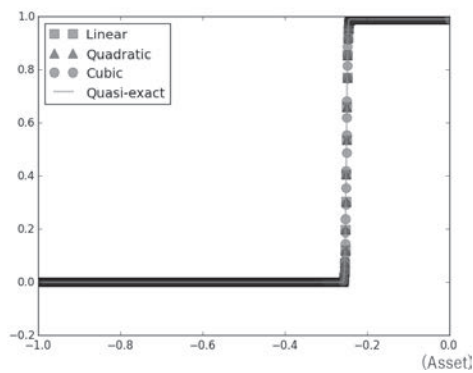
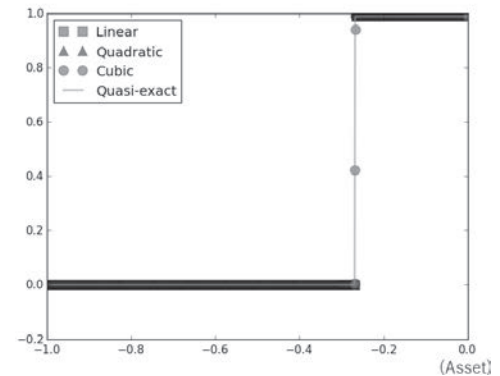


図4 Model I and Model II の bond price schedule 及び政策関数

(A) Model I
(Bond Price)



(B) Model II
(Bond Price)



時のコストの経済のもとでは、債券価格に信用リスクが反映される区間が非常に狭く、債務残高がある一定の水準を超えると突然信用リスクが発生し、急上昇し、すぐに上限に達してしまうことを意味する。すると、対外資産（債務）に関するほとんどのグリッドが債券価格が $1/(1+r)$ か0の領域に配分されてしまい、計算上の非効率性が生じることとなる。一方、デフォルト時のコストが非対称な場合、bond price scheduleは緩やかな傾きとなっており、信用リスクは徐々に上乘せされていく（図2及び図3）。

3次スプラインが有利な点は、図4のパネル(B)が示しているように、Model IIのようなケースにおいても、bond price scheduleの価格0と価格 $1/(1+r)$ の間の中点、信用リスクを捉えられているところにある。Bond price

scheduleの傾きが非常に急なため、線形補間や2次スプラインでは捉えられていないが、3次スプラインではいくつか細く捕捉できていることが、 $\sigma(q)$ 等のモーメントの正確性に大きく貢献していると考えられる。

一方、Model Iのように所得へのショックの粘着性が高い場合においては、線形補間や2次スプラインも信用リスクの展開をある程度捉えられている（図4のパネル(A)）。しかしながら、3次スプラインの方がより細かい進展を捉えられており、各モーメントも準正確な解に近い値となっている。

次のセクションでは、線形補間や2次スプラインのこのような不正確性・非効率性をどのように緩和するのかを検討する。

V. 頑健性の検証

V-1. デフォルト時のコストが比例的であることが本当に問題なのか？

前の節において、線形補間や2次スプラインの非効率性の源泉が、デフォルト時のコストが比例的であることではないかと推論した。しかしながら、bond price scheduleの形状に影響を及ぼし得るソブリン・デフォルト・モデルのパラメーターは他にも多数ある。そこで、デフォルト時のコストを非対称に変えた場合、bond price scheduleの傾きがどのようになるのかを検証した。他のパラメーターはメインの分析と同じである（表1）。

各モーメントの結果は表8に、bond price scheduleは図5において示されている。Model I, Model IIの双方において、bond price scheduleの傾きが緩やかになっていることが分かる。しかしながら、相当程度緩やかになったModel IIでは線形補間のパフォーマンスが

著しく向上した一方で、傾きの緩和が抑制的なModel Iでは線形補間の正確性はあまり向上しなかった（表8）。効果の大きさに差はあるものの、デフォルト時のコストが比例的だと、bond price scheduleの傾きが急になることは示唆されたのではないかと考える。

V-2. グリッドを集中させる

デフォルト時のコストが比例的と考えた方が適切で、非対称なコストを導入することで問題を解決することが好ましくない場合があるかもしれないので、もう一つの方法を提案する。比例的なデフォルト時のコストが問題となるのは、信用リスクが反映されるbond price scheduleの区間が非常に狭く、多くのグリッドが信用リスクの計算に活用されていないためである。したがって、直接的な解決方法は、グリッドを信用リスクが生じ得る範囲に集中的に

図5 デフォルト時のコストを非対称にして計算した Model I 及び Model II の bond price schedules
（スプライン補間を実施）

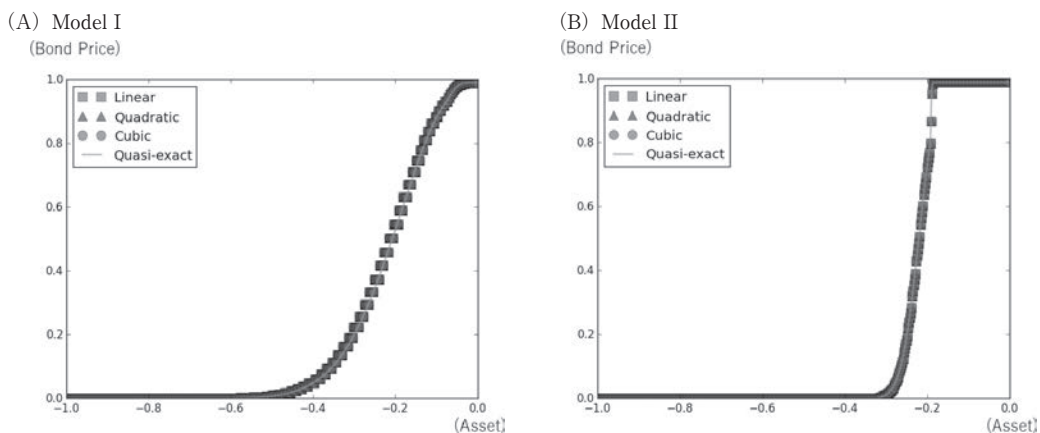


表8 シミュレーションの時間と計算結果：Model I と Model II のデフォルト時のコストが非対称だった場合

	Model I			Model II		
	Linear	Cubic	Quasi-exact	Linear	Cubic	Quasi-exact
$\sigma(y)$	1.001	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
$\sigma(c)$	1.004	1.002	1.000	1.000	1.000	1.000
$\sigma(TB/Y)$	1.027	1.024	1.000	0.993	0.994	1.000
$\sigma(q)$	1.086	1.087	1.000	0.000	0.937	1.000
$\rho(c, y)$	0.002	0.002	0.000	-0.000	0.000	0.000
$\rho(TB/Y, y)$	-0.000	-0.001	0.000	-0.000	0.000	0.000
$\rho(q, y)$	0.005	-0.012	0.000	NaN	-0.004	0.000
$\rho(q, TB/Y)$	-0.023	-0.029	0.000	NaN	0.004	0.000
Average default period	-0.000	0.007	0.000	0.000	0.000	0.000
Mean debt to output ratio	0.001	0.001	0.000	0.001	-0.001	0.000
Time to converge	122.37 sec	122.42 sec	24 hrs. 49 min	108.63 sec	120.67 sec	23 hrs. 3 min
Number of grid points for b	500	500	4000	500	500	4000
Number of grid points for y	125	125	2000	125	125	2000

配置することである。

しかしながら、予め信用リスクが生じる範囲が明らかとなっているわけではない。そこで、まずはモデルを少数のグリッドを活用して簡潔に解いた後、資産のグリッドの下限（債務のグリッドの上限）を決めることで、グリッドを必要な範囲に集中させることとする。

表9はその結果を示しており、景気循環のモーメントの正確性がDSSですら著しく向上

していることが確認できる。モデルを合計、2回解くことになるが、計算時間の増加は限定的である。

表 9 シミュレーションの時間と計算結果：Model I と Model II のグリッドを必要な範囲に集中させた場合

	Model I			Model II		
	DSS	Cubic	Quasi-exact	DSS	Cubic	Quasi-exact
$\sigma(y)$	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
$\sigma(c)$	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
$\sigma(TB/Y)$	0.998	0.998	1.000	1.008	0.940	1.000
$\sigma(q)$	0.957	1.003	1.000	1.128	1.173	1.000
$\rho(c, y)$	0.002	0.000	0.000	- 0.000	- 0.000	0.000
$\rho(TB/Y, y)$	- 0.001	0.000	0.000	0.001	0.009	0.000
$\rho(q, y)$	- 0.047	- 0.040	0.000	0.084	- 0.242	0.000
$\rho(q, TB/Y)$	- 0.022	0.039	0.000	0.007	- 0.026	0.000
Average default period	0.019	0.000	0.000	0.000	- 0.001	0.000
Mean debt to output ratio	0.001	- 0.002	0.000	0.000	- 0.001	0.000
Time to converge	16 min 12 sec	33.15 sec	24 hrs. 18 min	13 min 26 sec	1 min 48 sec	21 hrs. 47 min
Number of grid points for b	800	500	4,000	800	500	4,000
Number of grid points for y	400	100	2,000	400	100	2,000

VI. 結論

最近のソブリン・デフォルト・モデルの研究において、新興国特有の景気循環の特徴がよく再現されている。しかしながら、モデルは完全非線形な DSGE であり、解くには多大な計算時間を必要とする。そのため、正確性を極端に損なわない範囲で、グリッドの数を減らすことが、ソブリン・デフォルト・モデルをバイズ推定する際に、非常に重要となる。

本稿では、AR(1) 過程を Tuachen 及び Rouwenhorst の方法で離散化し、価値関数を 1 次、2 次、3 次スプラインで補間した場合のソブリン・デフォルト・モデルの正確性と速度について検証した。その結果、(i) Tauchen の方法は、安定した解が得られること、(ii) 価値関数を補間した場合、正確性も速度も改善すること、(iii) 3 次スプライン補間が、1 次・2 次スプラインと異なり、所得へのショックの過程の粘着性やデフォルト時のコストの種類と関係なく安定的に正確な解を出すこと、が示された。これらの結果は、ソブリン・デフォルト・

モデルの解法のパフォーマンスが所得へのショックの粘着性や bond price schedule の傾きから受ける影響が大きいことを示唆している。

それらから生じ得る不正確性・非効率性を緩和するために、本稿では 2 つの方法を提案している。第一に、デフォルト時のコストに非対称性を加えることである。非対称性を加えることによって、高次スプライン補間で価値関数を近似している場合は、非効率性が相当程度除去されることが確認できた。しかしながら、線形補間においては、十分に非効率性が除去できなかった。2 つ目の方法は、資産のグリッドの配置を集中することによって、信用リスクの計算に活用されていないグリッドを減らすことである。この方法は高次スプラインを活用した場合だけではなく、DSS においても、非効率性を除去することができた。

今後の研究としては、Farmer and Toda (2017) の方法により検証することが挙げられる。この方法は、非線形・非ガウシアン自己

回帰過程に適用可能であり、粘着性の高さに対しても頑健であることから、より良い結果が得られることが期待できる。

参 考 文 献

- Adda, J., Cooper, R., 2003. *Dynamic Economics: Quantitative Methods and Applications*. MIT Press, Cambridge, MA.
- Aguiar, M., Chatterjee, S., Cole, H., Stangebye, Z., 2016. Quantitative models of sovereign debt crises. *Handbook of Macroeconomics*. Elsevier, 2016. Print.
- Aguiar, M., Gopinath, G., 2006. Defaultable debt, interest rates and the current account. *Journal of International Economics* 69(1), 64-83.
- Aiyagari, S.R., 1994. Uninsured idiosyncratic risk and aggregate saving. *Quarterly Journal of Economics* 109, 659-684.
- Arellano, C., 2008. Default risk and income fluctuations in emerging economies. *American Economic Review* 98(3), 690-712.
- Cai, Y., Judd, K.L., 2014. Advances in numerical dynamic programming and new applications *Handbook of Computational Economics* 3, 479-516.
- Farmer, L.E., Toda, A.A., 2017. Discretizing nonlinear, non-Gaussian Markov processes with exact conditional moments. *Quantitative Economics* 8, 651-683.
- Flodén, M., 2008. A note on the accuracy of Markov-chain approximations to highly persistent AR(1) processes. *Economics Letters* 99, 516-520.
- French, E., 2005. The effects of health, wealth, and wages on labor supply and retirement behaviour. *Review of Economic Studies* 72, 395-427.
- Gumus, I., Katayama, M., Koeda, J., 2017. Model-based estimation of sovereign default risk. SSRN 3056539.
- Hatchondo, J.C., Martinez, L., Saprizza, H., 2010. Quantitative properties of sovereign default models: Solution methods matter. *Review of Economic Dynamics*, 3(4), 919-933.
- Judd, K.L., Solnick, A., 1998. Numerical dynamic programming with shape-preserving splines. Hoover Institution.
- Kopecky, K.A., Suen, R., M., H., 2010. Finite state Markov-chain approximations to highly persistent processes. *Review of Economic Dynamics* 3(3), 701-714.
- Mendoza, E., Yue, V.Z., 2012. A general equilibrium model of sovereign default and business cycles. *The Quarterly Journal of Economics* 127(2), 889-946.
- Neumeyer, P.A., Perri, F., 2005. Business cycles in emerging economies: the role of interest rates. *Journal of Monetary Economics* 52(2), 345-380.
- Panizza, U., Sturzenegger, F., Zettelmeyer, J., 2009. The economics and law of sovereign debt and default. *Journal of Economic Literature* 47(3), 651-698.
- Richter, A.W., Throckmorton, N.A., Walker, T.B., 2014. Accuracy, speed and robustness of policy function iteration. *Computational Economics* 44(4), 445-476.
- Rouwenhorst, K.G., 1995. Asset pricing implications of equilibrium business cycle models. In: Cooley, T.F. (Ed.), *Frontiers of Business Cycle Research*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 294-330.
- Stachurski, J., 2008. Continuous state dynamic programming via nonexpansive approximation.

- Computational Economics 31, 141-160.
- Tauchen, G., 1986. Finite state Markov-chain approximations to univariate or and vector autoregressions. *Economics Letters* 20, 177-181.
- Tauchen, G., Hussey, R., 1991. Quadrature-based methods for obtaining approximate solutions to nonlinear asset pricing models. *Econometrica* 59, 371-396.
- Uribe, M., Schmitt-Grohé, S., 2017. *Open Economy Macroeconomics*. Princeton University Press. Princeton.
- Uribe, M., Yue, V.Z., 2006. Country spreads and emerging countries: who drives whom? *Journal of International Economics* 69(1), 6-36.
- Wang, S.-P., Judd, K.L., 2000. Solving a savings allocation problem numerical dynamic programming with shape-preserving interpolation. *Computers and Operations Research* 27(5), 399-408.
- Yamazaki, T., 2018. Financial friction sources in emerging economies: Structural estimation of sovereign default models. PRI Discussion Paper Series (No. 18A-03) .

補論 Rouwenhorst の方法

ここでは, Rouwenhorst (1995) 及び Kopecky and Suen (2010) の方法についての概要を紹介する。厳密な証明については, 左記の論文において記載されている。

まず, 次の一般的な AR (1) 過程を考える。

$$z_t = \rho z_{t-1} + \varepsilon_t \quad (1)$$

なお, $0 \leq \rho \leq 1$ であり, ε_t は分散 σ_ε^2 のホワイト・ノイズであり, 平均 $E[z_t] = 0$, 分散は $\sigma_z^2 = \sigma_\varepsilon^2 / (1 - \rho^2)$ である。そのため, ε_t がホワイト・ノイズであるだけでなく, 正規分布に従う場合, z_t の確率過程も正規分布となる。Rouwenhorst (1995) はこのような確率過程をマルコフ連鎖 $\{y_t\}$ に近似する。

マルコフ連鎖 $\{y_t\}$ は対称で, $[-\psi, \psi]$ の範囲で等分に区切られた状態空間 $Y_N = \{\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_N\}$ であることを想定している。マルコフ遷移行列 Θ_N の要素は, 必ず 0 より大きく, 1 より小さくなければならない。このような性質を持つように作成されたマルコフ連鎖は, 一意で不変となる。

$p, q \in (0, 1)$ の 2 つのパラメーターにより, マルコフ遷移行列 Θ_N を次のように再帰的に作成する。N は $N \geq 2$ であることを仮定する。

手順 1 : $N = 2$ である場合, 以下のように遷移行列を作成する。

$$\Theta_2 = \begin{bmatrix} p & 1-p \\ 1-q & q \end{bmatrix}.$$

手順 2 : $N \geq 3$ である場合, 以下のように N 行 N 列の遷移行列を作成する。なお, $\mathbf{0}$ は $(N-1)$ 行 1 列の零行列である。

$$\Theta_2 = p \begin{bmatrix} \Theta_{N-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}' & 0 \end{bmatrix} + (1-p) \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \Theta_{N-1} \\ 0 & \mathbf{0}' \end{bmatrix} \\ + (1-q) \begin{bmatrix} \mathbf{0}' & 0 \\ \Theta_{N-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + q \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0}' \\ \mathbf{0} & \Theta_{N-1} \end{bmatrix}.$$

手順 3 : それぞれの行において, 要素の合計が 1 となるよう, 最上段と最下段を 2 で割る。

Kopecky and Suen (2010) は, 上記の手順を非常に簡素に行える方法を示している。 z_{t-1} が実現した場合の z_t の条件付期待値及び条件付分散は $\rho z_{t-1}, \sigma_\varepsilon^2$ となる。マルコフ連鎖 $\{y_t\}$ について, p, q, ψ を,

$$p = q = \frac{1+\rho}{2}, \quad \Psi = \sqrt{N-1} \sigma_\varepsilon$$

と定義すると, 下記の積率が得られ, $E(y_{t+1} |$

$y_t = \bar{y}_t$), $\text{var}(y_{t+1} | y_t = \bar{y}_t) = \sigma_\varepsilon^2$ であるので、 $\{y_t\}$ と $\{z_t\}$ の条件付き期待値・分散を一致させることができる。

条件付き期待値

$$E(y_{t+1} | y_t = \bar{y}_t) = (q-p)\psi + (p+q-1)\bar{y}_t$$

条件付き分散

$$\text{var}(y_{t+1} | y_t = \bar{y}_t) = \frac{4\psi^2}{(N-1)^2} [(N-i)(1-p)p + (i-1)q(1-q)]$$

期待値

$$E(y_t) = \frac{(q-p)\psi}{2-(p+q)}$$

分散

$$E(y_t^2)$$

$$\psi^2 \left\{ 1 - 4s(1-s) + \frac{4s(1-s)}{N-1} \right\}$$

共分散

$$\text{Cov}(y_t, y_{t+1}) = (p+q-1)\text{var}(y_t)$$

相関係数

$$\text{Corr}(y_t, y_{t+1}) = \frac{p+q-1}{p+q-1} = 1$$

Rouwenhorst (1995) の方法は、遷移行列 Θ_N は $\rho, \sigma_\varepsilon^2$ のみによって作成されており、 z_t の条件付確率分布の離散化によって作成されておらず、例えば、 ρ が 0.9 以上の高い粘着性を持つ確率過程においても適用することができる。マクロ経済モデルにおけるパフォーマンスも Kopecky and Suen (2010) によって確認されている。

補論 Tauchen の方法

マルコフ連鎖 $\{y_t\}$ を対称で、 $\bar{y}_N = -\bar{y}_1 = \Omega \sigma_z$ となるよう等分に区切られた状態空間 $Y_N = \{\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_N\}$ として作成する。 Ω は正の実数である。 i, \dots, N におけるマルコフ連鎖の遷移確率を下記の通り計算する。

$$\pi_{i,j} = \Phi \left(\frac{\bar{y}_j - \rho \bar{y}_i + h/2}{\sigma_\varepsilon} \right),$$

$j = 1, j = N$ の場合は、下記の通り計算する。

$$\pi_{i,j} = \Phi \left(\frac{\bar{y}_j - \rho \bar{y}_i + h/2}{\sigma_\varepsilon} \right) - \Phi \left(\frac{\bar{y}_j - \rho \bar{y}_i - h/2}{\sigma_\varepsilon} \right).$$